KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
BADAN STANDAR, KURIKULUM, DAN ASESMEN PENDIDIKAN
PUSAT PERBUKUAN

Matematika

Dicky Susanto, dkk.

SMA/SMK Kelas XI

Matematika untuk SMA/SMK Kelas XI

Penulis
Dicky Susanto
Savitri K. Sihombing
Marianna Magdalena Radjawane
Yulian Candra
Daniel Sinambela

Penelaah
Widowati
Ali Mahmudi

Penyelia/Penyelaras
Supriyatno
E. Oos M. Anwas
NPM Yuliarti Dewi

Ilustrator
Faris M. Naufal

Penyunting
Tri Hartini

Penata Letak (Desainer)
M. Firdaus Jubaedi

Penerbit
Pusat Perbukuan
Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan
Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Komplek Kemdikbudristek Jalan RS. Fatmawati, Cipete, Jakarta Selatan
https://buku.kemdikbud.go.id

Cetakan pertama, 2021
ISBN 978-602-244-536-4 (no.jil.lengkap)
ISBN 978-602-244-789-5 (jil.2)

Isi buku ini menggunakan huruf Minion Pro 11/15 pt, Robert Slimbach
xvi, 152 hlm.: 17,6 x 25 cm.

Kata Pengantar

Pusat Perbukuan; Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan; Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset dan Teknologi sesuai tugas dan fungsinya mengembangkan kurikulum yang mengusung semangat merdeka belajar mulai dari satuan Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah. Kurikulum ini memberikan keleluasaan bagi satuan pendidikan dalam mengembangkan potensi yang dimiliki oleh peserta didik. Untuk mendukung pelaksanaan kurikulum tersebut, sesuai Undang-Undang Nomor 3 tahun 2017 tentang Sistem Perbukuan, pemerintah dalam hal ini Pusat Perbukuan memiliki tugas untuk menyiapkan Buku Teks Utama.

Buku teks ini merupakan salah satu sumber belajar utama untuk digunakan pada satuan pendidikan. Adapun acuan penyusunan buku adalah Keputusan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia Nomor 958/P/2020 tentang Capaian Pembelajaran pada Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah. Sajian buku dirancang dalam bentuk berbagai aktivitas pembelajaran untuk mencapai kompetensi dalam Capaian Pembelajaran tersebut. Penggunaan buku teks ini dilakukan secara bertahap pada Sekolah Penggerak dan SMK Pusat Keunggulan, sesuai dengan Keputusan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Nomor 162/M/2021 tentang Program Sekolah Penggerak.

Sebagai dokumen hidup, buku ini tentunya dapat diperbaiki dan disesuaikan dengan kebutuhan. Oleh karena itu, saran-saran dan masukan dari para guru, peserta didik, orang tua, dan masyarakat sangat dibutuhkan untuk penyempurnaan buku teks ini. Pada kesempatan ini, Pusat Perbukuan mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah terlibat dalam penyusunan buku ini mulai dari penulis, penelaah, penyunting, ilustrator, desainer, dan pihak terkait lainnya yang tidak dapat disebutkan satu per satu. Semoga buku ini dapat bermanfaat khususnya bagi peserta didik dan guru dalam meningkatkan mutu pembelajaran.

Jakarta, Oktober 2021
Plt. Kepala Pusat,

Supriyatno
NIP 19680405 198812 1 001

Prakata

Puji syukur kami panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa atas berkat dan rahmat-Nya dalam menyelesaikan penulisan Buku Siswa ini. Buku ini disusun untuk memenuhi Capaian Pembelajaran Fase F untuk SMA/SMK Kelas XI.

Matematika sering kali dianggap pelajaran yang abstrak, sulit, dan kurang relevan dalam kehidupan. Padahal pada hakikatnya, banyak konsep dan prinsip matematika justru muncul di alam dan dekat dengan kehidupan sehari-hari. Harapan kami, buku ini dapat mengubah mispersepsi mengenai matematika dengan menggunakan pendekatan yang lebih kontekstual melalui permasalahan kehidupan nyata dan melibatkan siswa secara aktif dalam bereksplorasi dengan pertanyaan penuntun. Sebagian besar pembelajaran matematika dalam buku ini diupayakan menarik perhatian dan minat siswa sehingga "tidak merasa sedang belajar matematika". Siswa akan diajak untuk berpikir kritis dan kreatif untuk mengembangkan keterampilan berpikir aras tinggi (HOTS). Selain itu, di banyak kesempatan siswa akan berdiskusi, berkomunikasi, bekerja sama, dan menggunakan teknologi dalam menyelesaikan permasalahan sehingga mengasah kemampuan sesuai dengan Profil Pelajar Pancasila dan keterampilan abad ke-21.

Kami menghaturkan ucapan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah membantu mewujudkan buku ini, khususnya para penelaah, yaitu Prof. Dr. Widowati, M.Si. (Universitas Diponegoro) dan Dr. Ali Mahmudi (Universitas Negeri Yogyakarta) untuk bimbingan dan masukan yang berharga dari awal sampai akhir proses penulisan.

Akhir kata, kami berharap buku ini bermanfaat bagi pembelajaran matematika SMA/SMK Kelas XI, dan semakin banyak siswa yang mulai menyenangi matematika dan merasakan manfaat belajar matematika.

Selamat bermatematika!

Jakarta, Agustus 2021

Tim Penulis

Daftar Isi

Daftar Gambar

Daftar Tabel

Petunjuk Penggunaan Buku

Pembuka Bab

Seberapa besar kemungkinan akan turunnya hujan? Berapa persen kemungkinan seseorang terpapar Covid-19? Berapa persen kemungkinan seseorang memiliki golongan darah AB-? Semua pertanyaan ini berhubungan dengan kemungkinan suatu kejadian yang merupakan bagian dari kehidupan kita sehari-hari. Kalian bisa memprediksi kemungkinan suatu kejadian dengan menggunakan salah satu bidang matematika yang disebut **peluang**.

Kalian menemukan pembuka bab sebagai bagian paling awal dari bab yang memberikan gambaran besar mengenai topik yang akan dipelajari. Ada rasionalisasi dalam bab sehingga timbul minat dan motivasi kalian untuk mempelajari ide utama atau ide besar yang menghubungkan konsep-konsep.

Pertanyaan Pemantik

Pertanyaan Pemantik

1. Bagaimana kalian dapat menentukan peluang dari dua kejadian acak yang terkait seperti melempar dua dadu?
2. Dalam kondisi apa kalian dapat menjumlahkan masing-masing peluang kejadian untuk menentukan peluang dari kejadian yang berhubungan?

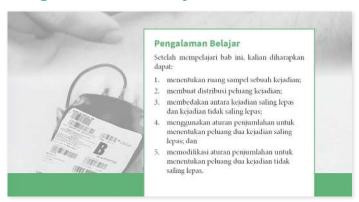
Kalian menemukan bagian ini pada awal bab karena merupakan pertanyaan yang menuntun pemahaman materi dan pengembangannya sepanjang pembelajaran bab tersebut. Kalian akan menemukan kedalaman dan keluasan dari materi pelajaran tersebut melalui pertanyaan tersebut.

Kata Kunci

Kata atau konsep yang merupakan kunci untuk dihubungkan dengan kata atau konsep lain. Pemahaman terhadap kata kunci menolong kalian untuk mengaitkan konsep yang satu dengan konsep lainnya.

Peta Konsep

Peta konsep yang terdapat pada awal bab merupakan diagram yang menunjukkan hubungan antarkonsep yang terdapat dalam setiap bab. Kalian perlu mencermati peta konsep ini untuk mendapatkan gambaran yang luas tentang isi bab tersebut.

Pengalaman Pembelajaran

Terdapat pada awal bab yang menjadi arahan tercapainya kompetensi setelah mempelajari bab tersebut. Pengalaman belajar menolong kalian untuk memonitor perkembangan belajar kalian dalam bab tersebut yang akan dihubungkan dengan refleksi pada akhir pembahasan.

Ayo Bereksplorasi

Kalian melakukan kegiatan ini untuk menyelidiki konsep matematika yang berkaitan dengan pembahasan materi. Eksplorasi selalu dilakukan sebelum kalian mendalami konsep matematika beserta aplikasinya.

Ayo Berpikir Kritis

Kalian berpikir kritis jika kalian dapat menganalisis informasi untuk mengambil kesimpulan atau menilai suatu hal dengan tepat. Keterampilan ini perlu kalian latih terus-menerus karena merupakan salah satu dari keterampilan abad ke-21.

Ayo Berpikir Kreatif

Kalian berpikir kreatif jika kalian dapat membuat ide atau alternatif solusi yang baru yang berbeda dari hal umum.

Ayo Mencoba

Kalian diharapkan dapat mengerjakan soal atau kegiatan sejenis setelah diberikan penjelasan penyelesaian satu atau lebih dari satu soal.

Penguatan Karakter

Kalian diharapkan dapat menghayati dan menerapkan karakter-karakter profil Pancasila yang perlu dipupuk sepanjang hayat dalam kegiatan pembelajaran serta kehidupan sehari-hari.

Ayo Berkomunikasi

Bertukar pikiran dengan teman-teman dan menyatakan gagasan merupakan kegiatan yang bermanfaat untuk memperdalam pengetahuan sehingga dapat menyelesaikan masalah atau menjawab pertanyaan.

Petunjuk

Petunjuk untuk kalian gunakan dalam pemecahan masalah. Baca dan gunakan bagian ini jika kalian mengalami kendala saat mencari solusi dari sebuah masalah.

Tahukah Kalian?

Kalian mendapatkan informasi tambahan yang berkaitan dengan materi yang sedang kalian pelajari yang merupakan aplikasi matematika dalam suatu fenomena atau peristiwa.

Ayo Berefleksi

Merenungkan dan melihat kembali secara evaluatif dan mendalam apa yang sudah dipelajari, membandingkannya, dan menarik pelajaran atau kesimpulan sederhana.

Ayo Mengingat Kembali

Apa yang telah kalian pelajari di kelas X berhubungan dengan apa yang akan kalian pelajari di kelas XI. Kalian akan lebih mudah memahami materi pelajaran kelas XI dengan pengetahuan yang telah dipelajari di kelas X.

Ayo Bekerja Sama

Bekerja sama merupakan salah satu bentuk dari bergotong royong. Kalian bekerja sama untuk menyelesaikan masalah atau menjawab pertanyaan matematika sehingga pemahaman kalian terhadap materi pelajaran lebih baik lagi. Selain itu, bekerja sama memerlukan saling memahami dan menghargai satu sama lain.

Ayo Berteknologi

Teknologi memudahkan kalian untuk menyelesaikan masalah atau pekerjaan matematika. Kalian dapat memanfaatkan kalkulator dan berbagai aplikasi untuk mengerjakan tugas kalian. Kalian memilih teknologi yang sesuai dengan kebutuhan kalian.

Contoh Soal

Contoh 1

Sederhanakanlah bentuk eksponen $\frac{2^5 \times 2^3}{2^2}$

Alternatif Penyelesaian:

$$\frac{2^5 \times 2^3}{2^2} = \frac{2^{(5+3)}}{2^2} = \frac{2^8}{2^2} = 2^{8-2} = 2^6$$

Bagian ini diberikan untuk membantu pemahaman kalian atas konsep yang dipelajari. Perhatikan contoh soal dan kaitkan dengan penjelasan sebelumnya agar kalian merasakan manfaat bagian tersebut.

Latihan

Latihan 1.1

1. Buktikan sifat eksponen nomor 6 dan 7.
2. Tentukan nilai p sedemikian sehingga persamaan berikut ini tepat
   a. $(3^4)^2 = 3^p$ b. $b^p.b^5 = b^9$ c. $(3\pi)^p = 27\pi^3$
3. Sederhanakanlah
   a. $\left(\frac{2^4 \times 3^6}{2^3 \times 3^2}\right)^3$

Kalian mengerjakan soal-soal dengan tiga jenis tingkat kesulitan, yaitu dasar, menengah, dan tinggi. Pertanyaan pada tingkat dasar berupa jawaban pendek yang menguji pemahaman konsep dan keterampilan dasar. Tingkat menengah berupa permasalahan yang lebih terstruktur, sedangkan tingkat tinggi merupakan permasalahan aplikasi dan keterampilan aras tinggi (HOTS).

Uji Kompetensi

Uji Kompetensi

1. Selesaikanlah

   a. $\left(\frac{x^{-5}y^4}{xy^3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{x^7y^{-3}}{x^{-4}y^6}\right)^{-\frac{1}{2}}, x \neq 0, y \neq 0$

   b. $\frac{(m^{10}n^{-2})^3 (m^5n^{-5})^3}{mn}, m \neq 0, n \neq 0$

   c. $\frac{p-q}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}, p \neq 0, q \neq 0$

Terdapat pada akhir bab, merupakan sarana bagi kalian untuk mengukur pencapaian kalian dalam topik bab. Kalian dapat mengerjakan sejumlah soal yang bervariasi dari yang sederhana hingga yang kompleks. Selain itu, soal dapat berupa hitungan ataupun pemahaman konsep.

Materi Pengayaan/Proyek

Materi Pengayaan

1. Buatlah suatu barisan geometri, dengan menentukan suku pertama, rasio, dan banyak suku pada tabel di bawah ini.

   Barisan geometri 1.

Suku pertama	....
Rasio	....
Banyak suku	....
... , ... , ... , ... , ..., ...	

Kegiatan yang dapat digunakan untuk memperluas atau memperdalam wawasan dan pemahaman atas konsep matematika yang sedang dipelajari. Materi pengayaan dapat bersifat sebagai pendalaman materi, penerapan dalam bidang teknologi/informatika, atau kegiatan eksplorasi/proyek.

Refleksi

Refleksi

Dalam bab ini kalian sudah belajar tentang eksponen dan logaritma serta bagaimana hubungan antara eksponen dan logaritma.

1. Apa itu eksponen dan logaritma?
2. Apa perbedaan dari fungsi pertumbuhan eksponensial dan fungsi penurunan eksponensial? Berikan masing-masing satu contoh.
3. Apa hubungan antara eksponen dan logaritma?
4. Berikan 1 contoh penerapan logaritma dalam kehidupan sehari-hari.

Pada akhir bab atau subbab, kalian akan diajak memikirkan kembali apa yang sudah dipelajari dan seberapa dalam/tepat pemahamanmu atas pembelajaran pada bagian tersebut.

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2021
Matematika untuk SMA/SMK Kelas XI
Penulis: Dicky Susanto, dkk.
ISBN: 978-602-244-789-5 (jil.2)

Bab 1

Komposisi Fungsi dan Fungsi *Invers*

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan kalian dapat

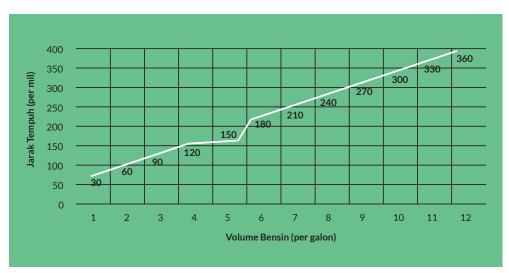
1. Menjelaskan pengertian fungsi
2. Menentukan domain, kodomain, dan *range* dari suatu fungsi
3. Menjelaskan syarat dan aturan komposisi fungsi
4. Membuat komposisi fungsi yang terdiri atas dua atau lebih fungsi
5. Menggunakan konsep komposisi fungsi untuk menyelesaikan masalah
6. Menyelidiki sifat komutatif dan sifat asosiatif pada komposisi fungsi
7. Menjelaskan syarat dan aturan pembuatan fungsi *invers*
8. Menggunakan konsep fungsi *invers* untuk menyelesaikan masalah

Pengantar Bab

Setiap dari kalian pasti pernah ke Stasiun Pengisian Bahan Bakar Umum (SPBU). Kalian pasti paham bahwa biaya yang dibayar untuk pembelian bahan bakar kendaraan bergantung pada jenis bahan bakar dan volumenya.

Gambar 1.1 Pembacaan Volume Bensin dan Harga yang Harus Dibayar
Sumber: liputan6.com/Faizal Fanani (2018)

Bagaimana hubungan antara volume bahan bakar yang dibeli dan biaya yang dikeluarkan? Apakah penambahan volume bahan bakar berbanding lurus dengan biaya? Dapatkah relasi antara biaya dengan volume bahan bakar dituliskan sebagai $B = f(V)$? V menyatakan volume bahan bakar yang dibeli dan B merupakan biaya yang dibayar.

Grafik di bawah menunjukkan hubungan jarak tempuh suatu kendaraan terhadap penggunaan bahan bakar. Apakah penambahan penggunaan volume bahan bakar berbanding lurus dengan jarak tempuh kendaraan? Bagaimana menuliskan relasi antara keduanya?

Gambar 1.2 Grafik Jarak Tempuh terhadap Volume Bahan Bakar

Dapatkah kalian menyatakan semua volume bahan bakar yang dapat ditampung sebuah kendaraan sebagai suatu himpunan? Dapatkah kalian menyatakan semua jarak maksimal yang dapat ditempuh untuk setiap volume bahan bakar sebagai suatu

himpunan? Konsep seperti ini akan kalian pelajari dalam topik domain, kodomain, dan *range* dari fungsi.

Jika kalian menggabungkan kedua informasi di atas, relasi baru apa yang kalian dapatkan? Hal ini yang akan dipelajari lebih mendalam dalam subbab komposisi fungsi. Kalian juga akan mempelajari operasi-operasi yang dapat diterapkan pada dua atau lebih fungsi.

Kembali ke relasi biaya terhadap pembelian bahan bakar, bagaimana kalian menentukan banyak bahan bakar yang dibeli jika kalian mempunyai sejumlah uang tertentu? Bagaimana kalian dapat menentukan jarak tempuh jika kendaraan kalian mempunyai volume bahan bakar tertentu? Hubungan timbal balik ini akan dipelajari dalam fungsi *invers*.

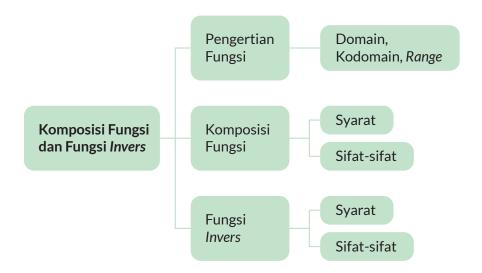
Secara umum, bab dimulai dengan pemahaman tentang pengertian fungsi termasuk di dalamnya domain, kodomain, dan *range*. Bagian kedua dari bab ini akan membahas tentang komposisi fungsi serta operasi-operasi fungsi yang lain yang sering digunakan dalam kehidupan sehari-hari. Di sini juga akan dibahas syarat yang harus dipenuhi untuk mengomposisikan dua atau lebih fungsi. Pada bagian akhir dari bab kalian akan mempelajari *invers* dari suatu fungsi beserta syarat dan sifat-sifatnya; termasuk di dalamnya *invers* dari komposisi fungsi.

Pertanyaan Pemantik

- Apakah setiap relasi merupakan fungsi?
- Apa peran domain, kodomain, dan *range* dari sebuah fungsi?
- Bagaimana menerapkan operasi dan komposisi fungsi untuk memodelkan suatu keadaan atau masalah?
- Kapan fungsi *invers* dapat diperoleh?
- Bagaimana menggunakan fungsi *invers* untuk memodelkan suatu keadaan atau masalah?

Kata Kunci

Fungsi, domain, kodomain, *range*, relasi, komposisi fungsi, fungsi *invers*

Peta Konsep

Gambar 1.3 Ronaldo dengan Nomor Punggung 7

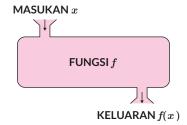
Sumber: twitter.com/Manchester United (2021)

Relasi dapat dipahami dalam banyak hal di kehidupan sehari-hari. Konsep relasi menjelaskan hubungan antara anggota-anggota dari dua himpunan. Contohnya, setiap pemain bola di tim Manchester United memiliki nomor punggung masing-masing. Ronaldo memiliki nomor punggung 7.

Hubungan ini biasanya dijelaskan dalam bentuk himpunan pasangan berurutan, diagram panah, dan diagram Kartesius.

A. Fungsi

Fungsi merupakan suatu relasi yang menghubungkan satu anggota dari suatu himpunan **tepat ke satu** anggota di himpunan yang lain. Fungsi adalah relasi yang lebih spesifik. Fungsi biasa dinyatakan dalam bentuk $f(x) = y$, di mana f merupakan fungsi, x merupakan variabel masukan (*input*) dan y adalah variabel keluaran

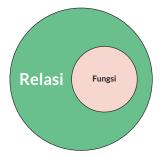
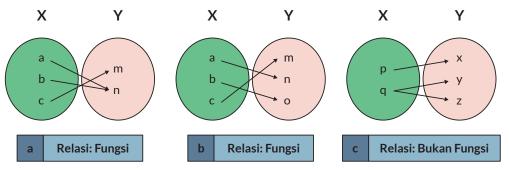
(*output*). Kalian dapat memahami konsep ini dengan membayangkan **fungsi sebagai mesin** seperti pada gambar berikut:

Gambar 1.4 Analogi Fungsi Mesin

Jelaslah, kalian dapat simpulkan bahwa ada relasi yang merupakan fungsi dan ada yang bukan merupakan fungsi.

1. Fungsi dan Bukan Fungsi

Secara ilustratif, hubungan antara fungsi dan relasi dapat dipahami melalui Gambar 1.5 dan Gambar 1.6.

Pada bagian ini, kalian akan belajar menentukan relasi-relasi yang merupakan fungsi dan bukan merupakan fungsi. Relasi-relasi ini akan disajikan dalam bentuk diagram panah dan diagram Kartesius.

Perhatikan contoh ketiga diagram panah berikut. Ada yang menunjukkan relasi yang berupa fungsi dan ada yang menunjukkan bukan fungsi.

Gambar 1.5 Ada Relasi yang Bukan Fungsi

Gambar 1.6 Relasi Merupakan Fungsi dan Bukan Fungsi

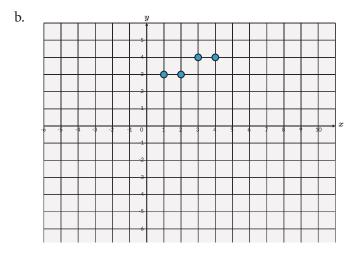
Relasi yang terdapat pada **Gambar 1.6 (a)** dan **(b)** merupakan fungsi karena relasi tersebut menghubungkan satu anggota himpunan *input* dengan tepat satu anggota himpunan *output*. **Gambar 1.6 (c)** merupakan contoh relasi yang *bukan* fungsi karena relasi tersebut menghubungkan satu anggota; "q" ke dua anggota berbeda "y" dan "z".

Ayo Berdiskusi

Diskusikan dalam kelompok, apakah kedua relasi dalam diagram Kartesius ini merupakan fungsi atau bukan fungsi.

Tuliskan juga pasangan berurutan dari setiap titik.

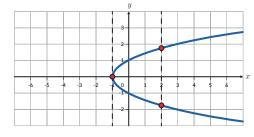
a.

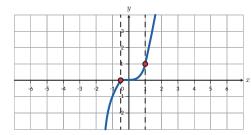
b.

Gambar 1.7 Relasi dalam Diagram Kartesius

Tahukah Kamu?

Hubungan antara pemakaian bahan bakar dengan jarak tempuh dipengaruhi oleh beberapa hal seperti kepadatan lalu lintas, jalan mulus, dan jenis mobil. Pernahkah kalian memikirkan bahwa model fungsi sangat diperlukan untuk membuat hubungan antara pemakaian bahan bakar dengan jarak tempuh sebuah mobil?

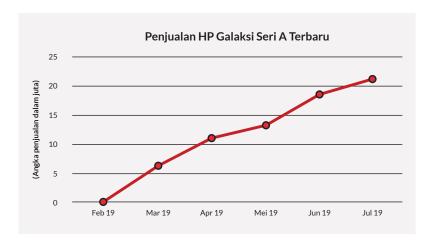
Seperti yang kalian sudah ketahui, relasi sering juga ditampilkan dalam bentuk grafik. Kalian dapat menentukan apakah relasi semacam ini merupakan fungsi atau bukan dengan menggunakan **Tes garis vertikal.** Caranya yaitu cukup menggeser garis vertikal dari kiri ke kanan (atau sebaliknya) dan melewati grafik relasi. Apabila garis vertikal tersebut memotong grafik di dua atau lebih titik yang berbeda, maka relasi tersebut bukanlah fungsi.

Gambar A

Gambar A menampilkan grafik dari relasi dengan persamaan $x = y^2$. Dengan menggunakan Tes garis vertikal, dapat dilihat bahwa pada $x = 2$ garis vertikal memotong grafik pada dua titik yang berbeda. Relasi ini bukanlah suatu fungsi.

Gambar B

Gambar B menampilkan grafik dari relasi dengan persamaan $y = x^3$. Dengan menggunakan Tes garis vertikal, dapat dilihat bahwa untuk setiap nilai x, garis vertikal memotong grafik tepat pada satu titik. Relasi ini adalah suatu fungsi.

Gambar 1.8 Penggunaan Tes Garis Vertikal untuk Menentukan Relasi

Latihan 1.1

1. Apakah relasi-relasi di bawah ini merupakan fungsi? Jelaskan alasanmu.
   a. Relasi antara jumlah penjualan HP Galaksi seri A terhadap waktu.

   b. Relasi antara lama mengunggah video di *YouTube* terhadap waktu.

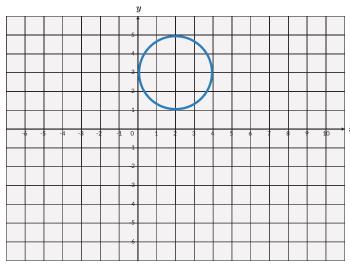
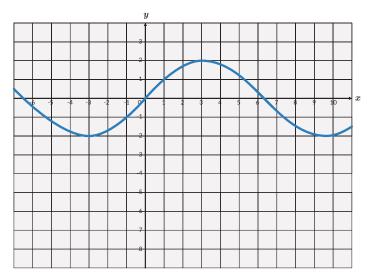
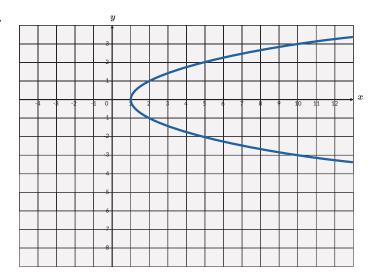
Sumber: tubularinsights.com (2010)

2. Satuan energi adalah Joule dan kalori dengan 1 J = 2,4 kal. Apakah hubungan antara Joule dan kalori merupakan suatu fungsi? Jelaskan.

3. Berdasarkan data, pada tahun 2001 perusahaan A mampu menjual 9 laptop. Pada tahun 2002 dan 2003 perusahaan A mampu menjual masing-masing 27 dan 81 laptop. Apabila relasi antara tahun dan jumlah penjualan laptop membentuk fungsi eksponensial, berapa penjualan laptop pada tahun 2007?
4. Tentukan relasi mana dari grafik-grafik berikut yang merupakan fungsi (gunakan tes garis vertikal).

a.

b.

c.

Ayo Berkomunikasi

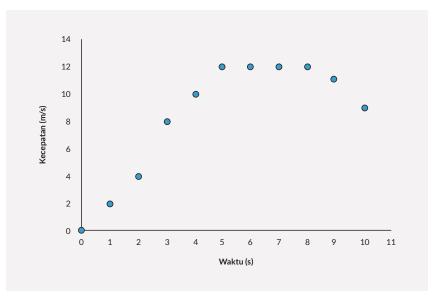
Relasi yang bukan fungsi dapat dibuat menjadi fungsi. Setujukah kalian dengan pendapat ini? Bagaimana kalian melakukan hal tersebut? Gunakan salah satu contoh soal dalam Latihan 1.1 no. 4 untuk mengubah relasi bukan fungsi menjadi fungsi.

2. Domain, Kodomain, dan *Range*

Eksplorasi 1.1 Domain, Kodomain, dan *Range*

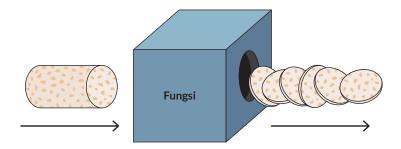
Kalian sudah belajar domain, kodomain, dan *range* di SMP. Kalian memperdalam pemahaman ini dengan mengeksplorasi tiga masalah. Ketiga masalah tersebut dibuat berurutan agar kalian memperoleh pemahaman yang benar tentang domain, kodomain, dan *range*.

Masalah Pertama

Data kecepatan seorang pelari jarak pendek (*sprinter*) setiap detik dicatat dan ditampilkan dalam grafik berikut:

Gambar 1.9 Grafik Kecepatan Pelari terhadap Waktu

Pertanyaan

1. Buatlah tabel untuk grafik tersebut.
2. Nyatakan waktu (masukan) yang dicatat dalam notasi himpunan.
3. Nyatakan kecepatan (keluaran) yang dicatat dalam notasi himpunan.

Masalah Kedua

Gambar 1.10 Mesin Memproses Tempe Menjadi Keripik Tempe

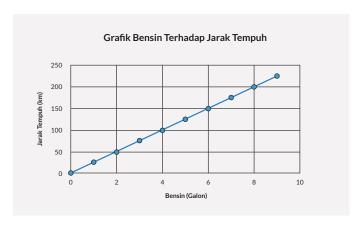
Sebuah pabrik pembuatan keripik tempe memiliki mesin yang beroperasi dengan mengubah 1 potong tempe bulat menjadi 6 keripik tempe. Pembuatan tempe dapat saja menghasilkan $\frac{1}{2}$ potong keripik tempe atau bentuk pecahan lainnya. Menurut aturan, mesin membuang keripik yang tidak utuh ini (tidak lulus *quality control*) dan mengeluarkan keripik utuh. Mesin keripik tempe hanya beroperasi apabila ada

minimal 200 potong tempe yang dimasukkan dan berhenti beroperasi apabila lebih dari 600 potong tempe dimasukkan. Asumsikan mesin produksi keripik tempe adalah sebagai **fungsi linear**, lengkapi tabel produksi tempe berikut:

Tabel 1.1 Jumlah Potongan Tempe dan Keripik Tempe

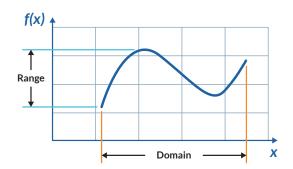
Jumlah Potong Tempe (Masukan)	Jumlah Keripik yang Dihasilkan (Keluaran)
200	
200,25	
500,75	
...	
600	
601	

1. Tuliskan notasi himpunan yang menyatakan masukan dari mesin fungsi keripik tempe. Himpunan ini disebut sebagai domain.
2. Tuliskan notasi yang menyatakan semua kemungkinan keripik tempe yang dihasilkan. Himpunan ini disebut sebagai kodomain.
3. Tuliskan notasi himpunan yang menyatakan keluaran dari mesin fungsi keripik tempe. Himpunan ini disebut sebagai *range*.
4. Berdasarkan pertanyaan 3 dan 4, jelaskan hubungan antara kodomain dan *range*.

Penjelasan lebih lanjut tentang domain dan *range* dapat juga kalian pahami melalui contoh grafik di bawah ini. Perhatikan hubungan antara penggunaan bahan bakar dengan jarak tempuh mobil "XY" pada jalan bebas hambatan yang diberikan oleh grafik.

Gambar 1.11 Jarak Tempuh Terhadap Jumlah Bahan Bakar

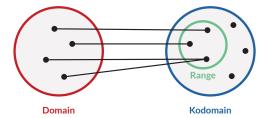
Jika x adalah jumlah bahan bakar dalam galon maka bahan bakar dapat dituliskan $0 \leq x \leq 9$. Domain dari jumlah bahan bakar yang dinyatakan dalam himpunan adalah $\{ x \mid 0 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{R} \}$, dengan $\mathbb{R}$ merupakan himpunan bilangan riil. Domain ini dapat juga dituliskan dalam bentuk [0,9].

Jarak tempuh dituliskan sebagai $0 \leq y \leq 250$. *Range* dari jarak tempuh adalah $\{ y | 0 \leq y \leq 250, y \in \mathbb{R} \}$, dengan $\mathbb{R}$ merupakan himpunan bilangan bulat positif. *Range* dapat juga dituliskan dalam bentuk [0,250].

Jika diberikan grafik maka penentuan domain dan *range* dari suatu fungsi ditunjukkan masing-masing oleh nilai yang digunakan pada sumbu x dan sumbu y.

Gambar 1.12 Domain dan *Range* dari Fungsi

Ayo Berkomunikasi

Jelaskan pengertian domain dan *range* fungsi dengan menggunakan kata-katamu sendiri.

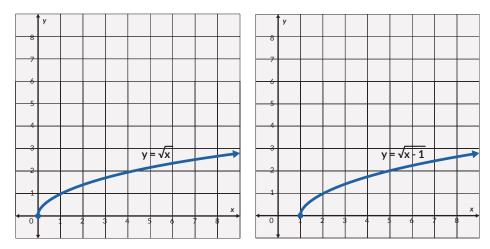
Pengertian domain, kodomain, dan *range* dapat dilihat secara utuh dalam gambar di bawah ini.

Gambar 1.13 Domain, Kodomain, dan *Range*

Ayo Berpikir Kritis

Kalian sudah memahami penggunaan domain, kodomain, dan *range* dalam kehidupan sehari-hari. Berikan contoh lain dalam kehidupan nyata yang membedakan pengertian kodomain dan *range*.

Masalah Ketiga

Bagaimana menentukan domain, kodomain, dan *range* dari suatu fungsi jika diberikan dalam bentuk aljabar?

a. Perhatikan kedua grafik di bawah ini.

Gambar 1.14 Dua Fungsi Akar Berbeda

Tuliskan domain dan *range* dari kedua grafik dalam notasi himpunan.

b. Ayo Berteknologi

Gunakan *Microsoft Excel* atau *Geogebra* untuk menggambar $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$, dan tentukan domain dan *range*-nya.

Latihan 1.2

1. Ayo Berteknologi

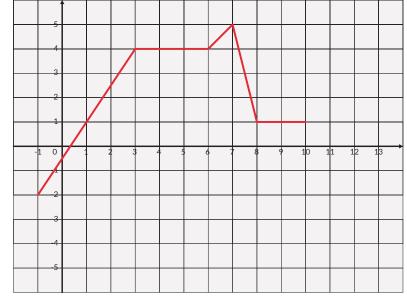
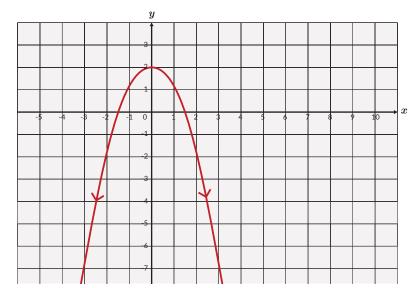
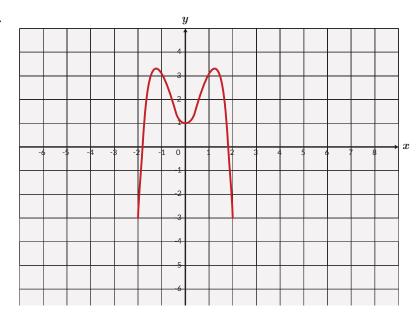
   Gunakan *Geogebra* untuk menggambar fungsi-fungsi di bawah ini jika memungkinkan. Gambarkan dan tentukan domain dan *range* dari fungsi-fungsi berikut:

   a. $f(x) = x^2 - 1$

   b. $f(x) = \frac{x+1}{2-x}$

   c. $f(x) = \sqrt{x-3} + 4$

2. Tentukan domain dan *range* dari setiap fungsi di bawah ini.

   a.

b.

c.

3. a. Berikan contoh suatu situasi atau fungsi dalam kehidupan sehari-hari di mana domain fungsi tidak dapat berharga negatif.

   b. Berikan contoh suatu situasi atau fungsi dalam kehidupan sehari-hari di mana *range* tidak dapat berharga negatif.

4. a. Tentukan fungsi yang menyatakan hubungan antara suhu dalam Celcius dan Kelvin.

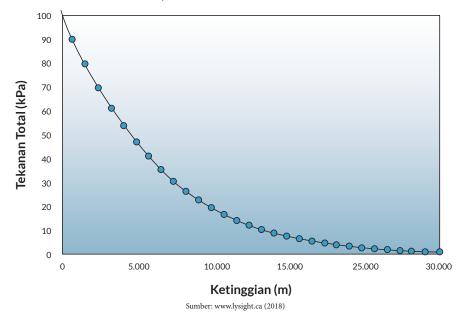
   b. Tentukan juga domain dan *range* dari fungsi tersebut. Petunjuk: apakah ada suhu terendah dan tertinggi di alam semesta?

5. (Depresiasi nilai laptop) Seorang YouTuber membeli sebuah laptop baru seharga Rp20.000.000,00. Jika harga jual laptop tersebut pada tahun ke-t turun secara eksponensial dan dideskripsikan oleh fungsi berikut:

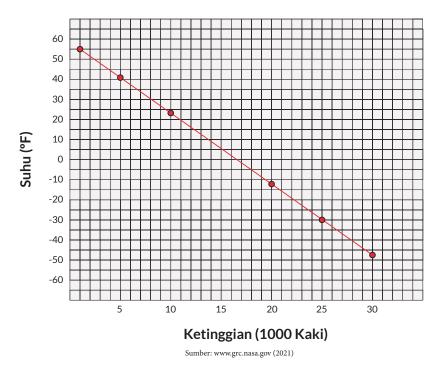
$$H(t) = 20.000.000 \times e^{-0.25t},$$

   a. Berapakah harga jual laptop tersebut pada tahun ke-5?
   b. Tentukan domain dan *range*-nya.

6. Tekanan udara berkurang jika ketinggian dari permukaan laut bertambah sebagaimana yang ditunjukkan oleh grafik di bawah ini. Tekanan udara dinyatakan dalam kiloPascal dan ketinggian di atas permukaan laut dinyatakan dalam kaki. Satu kaki = 0,3 m.

Sumber: www.lysight.ca (2018)

   a. Tuliskan domain dan *range* dari fungsi ini.
   b. Apakah ada tekanan udara bernilai negatif?

7. Grafik suhu terhadap ketinggian di atas permukaan laut diberikan di bawah ini. Suhu diberikan dalam derajat Fahrenheit dan ketinggian di atas permukaan laut dalam kaki.

Sumber: www.grc.nasa.gov (2021)

a. Tuliskan domain dan *range* dari fungsi ini.

b. Apakah suhu dapat bernilai negatif?

8.

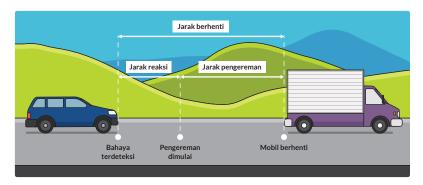
Gunakan *Geogebra* untuk menyelesaikan tugas ini.
Gambarkan suatu fungsi dengan ketentuan sebagai berikut.

- Domain memenuhi $0 \leq x \leq 10$.
- *Range* memenuhi $3 \leq y \leq 23$.
- Titik (1,5) dan (4,11) memenuhi fungsi yang dimaksud.

B. Komposisi Fungsi

Sebelum belajar tentang komposisi fungsi secara mendalam, coba amati dan pahami cara menggabungkan dua fungsi dalam eksplorasi berikut.

EkSplorasi 1.2

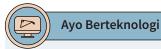
Perhatikan gambar di bawah ini.

Gambar 1.15 Jarak Henti Mobil

Seorang sopir sedang mengendarai mobil melewati sebuah desa kecil. Ketika melihat halangan di depan, sopir menginjak rem agar mobil berhenti. Jarak henti disebabkan oleh dua hal. Pertama, jarak akibat waktu yang diperlukan antara melihat halangan dan mengerem mobil (waktu reaksi). Kedua, jarak tempuh akibat pengereman. Tabel 1.2 menunjukkan jarak henti mobil sesuai dengan kecepatan mobil.

Tabel 1.2 Jarak Henti Mobil

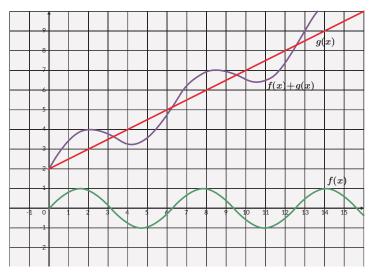
Kecepatan (km/jam)	Jarak akibat waktu reaksi (m)	Jarak pengereman (m)	Jarak total yang ditempuh (m)
40	17	9	26
50	21	14	35
60	25	20	45
70	29	27	56
80	33	36	69
90	38	45	83
100	42	56	98
110	46	67	113

Sumber: www.internationalclinicaltrials.com (2017)

Gunakan teknologi untuk menjawab tugas Eksplorasi 1.2

Grafik a-c dapat digambar dengan menggunakan *Microsoft Excel* atau *Geogebra* atau secara manual.

a. Gambarkan grafik jarak akibat waktu reaksi terhadap kecepatan.
b. Gambarkan grafik jarak pengereman terhadap kecepatan.
c. Gambarkan grafik jarak total terhadap kecepatan.
d. Apakah hasil c sama dengan a+b? Tunjukkan dengan membandingkan nilai fungsi pada kecepatan yang sama.
e. Tentukan domain dan *range* dari nomor d.

1. Penjumlahan dan Pengurangan Fungsi

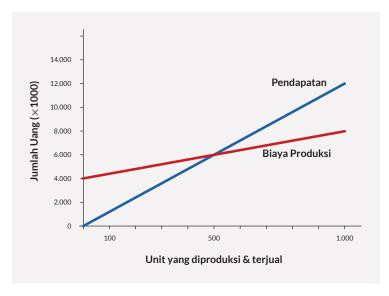
Penjumlahan dua atau lebih fungsi dapat menghasilkan fungsi yang baru. Perhatikan kedua grafik di bawah ini. Fungsi $f(x)$ (berwarna hijau) dijumlahkan dengan fungsi $g(x)$ (berwarna merah). Bagaimana dengan domain dan *range* dari fungsi yang baru?

Gambar 1.16 Penjumlahan Dua Fungsi

Apakah dua atau lebih fungsi hanya dapat dijumlahkan saja? Apakah fungsi juga menyerupai bilangan yang jika ada lebih dari satu maka dapat dijumlahkan,

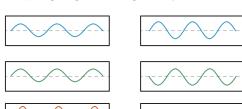
dikurangkan, dikalikan, dan dibagi? Apakah operasi fungsi akan memengaruhi domain dari fungsi baru yang dihasilkan?

Jika $f(x)$ dan $g(x)$ merupakan dua fungsi dengan domain masing-masing D_f dan D_g. Maka penjumlahan $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ menghasilkan fungsi yang baru dengan domain $D_f \cap D_g$.

Jika $f(x)$ dan $g(x)$ merupakan dua fungsi dengan domain masing-masing D_f dan D_g. Maka pengurangan $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ menghasilkan fungsi yang baru dengan domain $D_f \cap D_g$.

Perhatikan fungsi pendapatan dan biaya produksi yang diberikan dalam grafik di bawah ini. Keduanya merupakan fungsi dari jumlah barang yang diproduksi.

Gambar 1.17 Fungsi Pendapatan dan Biaya Produksi

a. Kalian ingin mengetahui keuntungan yang diperoleh dari penjualan setiap barang. Bagaimana cara menemukan fungsi keuntungan jika diketahui fungsi pendapatan dan biaya produksi? (Petunjuk: penjumlahan atau pengurangan?)
b. Buatlah tabel yang menunjukkan keuntungan sebagai fungsi dari jumlah barang. Tentukan juga domain dan *range*-nya!
c. Buatlah grafik yang mewakili keuntungan sebagai fungsi dari jumlah barang!

Dua gelombang apa saja jika bertemu akan berpadu. Perpaduan dua gelombang atau lebih dapat dinyatakan dengan penjumlahan kedua atau lebih fungsi sinus. Penjumlahan kedua fungsi sebenarnya adalah penjumlahan simpangan gelombang. Simpangan gelombang ditunjukkan oleh ketinggian gelombang dalam grafik.

Gambar 1.18 Penjumlahan Dua Fungsi Gelombang

Penjumlahan dua fungsi gelombang dapat menghasilkan gelombang baru dengan simpangan yang lebih besar atau simpangan lebih kecil bahkan simpangan nol. Jika ada dua pengeras suara dalam suatu ruangan maka bunyi bergantian terdengar keras dan lemah sesuai dengan posisi pendengar karena penjumlahan dua fungsi gelombang.

Ayo Berteknologi

Kode QR berikut ini berisi video yang mengilustrasikan penjumlahan grafik dua fungsi pada Gambar 1.18.
https://youtu.be/JZaFl8yR1tc

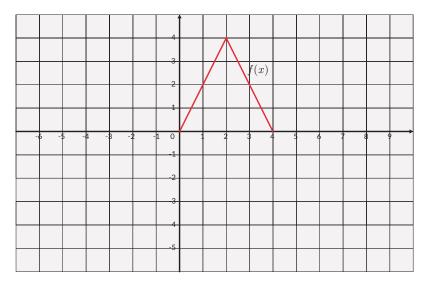
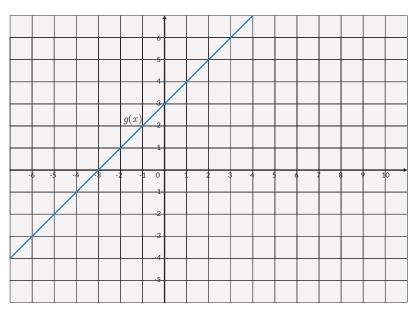
2. Perkalian dan Pembagian Fungsi

Kalian telah melihat bahwa operasi penjumlahan dan pengurangan bisa diterapkan terhadap dua fungsi. Operasi ini bisa diperluas penerapannya untuk lebih dari dua fungsi. Sekarang, bagaimana dengan operasi perkalian dan pembagian dua atau lebih fungsi?

Jika $f(x)$ dan $g(x)$ merupakan dua fungsi dengan domain masing-masing D_f dan D_g. Maka perkalian $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ menghasilkan fungsi yang baru dengan domain $D_f \cap D_g$.

Pembagian dua fungsi $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ secara umum belum tentu menghasilkan fungsi. Supaya $\frac{f}{g}$ menjadi sebuah fungsi, pembagi g tidak boleh memiliki nilai 0. Dengan kata lain, $\frac{f}{g}$ adalah fungsi dengan domain $(D_f \cap D_g) - \{x|g(x) = 0\}$.

Latihan 1.3

1. Jika $f(x) = \sqrt{x+3}$ dan $g(x) = x + 3$
   a. Tentukan $f(x) + g(x)$.
   b. Tentukan domain dan *range* dari $f(x) + g(x)$.
2. $f(x) = x^2 + 2$ dan $g(x) = 2x - 5$
   a. Tentukan $f(x) - g(x)$.
   b. Tentukan domain dan *range* dari $f(x) - g(x)$.
3. Buatlah suatu fungsi kuadrat dan fungsi eksponensial! Tentukan hasil penjumlahan dan pengurangan kedua fungsi tersebut!
4. Dua fungsi, $f(x)$ (berwarna merah) dan $g(x)$ (berwarna biru) diberikan di bawah ini.

Tentukan

a. $(f + g)(2)$

b. $(f - g)(1)$

c. $(fg)(3)$

d. $\left(\frac{f}{g}\right)(4)$

5. Pendapatan dari penjualan suatu produk adalah $R(x) = -20x^2 + 1000\,x$, sedangkan biaya produksi $C(x)$ adalah $100x + 8000$. Jumlah produk dinyatakan dalam x.

   Tentukan keuntungan sebagai fungsi dari jumlah produk x.

6. Jika $f(3) = 7, \quad g(3) = 6, \quad f(6) = 13, \quad g(6) = 12$, tentukan

   a. $f(3) + g(3)$

   b. $f(3) - g(3)$

   c. $f(3) \times g(3)$

   d. $f(3) \div g(3)$

7. Berikan contoh nyata tentang perkalian dua fungsi dalam kehidupan sehari-hari.

8. Berikan contoh nyata tentang pembagian dua fungsi dalam kehidupan sehari-hari.

3. Komposisi Fungsi

Potongan harga dan diskon merupakan hal yang biasa ditemui dalam kehidupan sehari-hari. Misalkan, sebuah toko memberikan penawaran khusus akhir pekan dengan dua pilihan. Pilihan pertama ialah "diskon 20%" terhadap semua barang dengan tambahan potongan harga sebesar Rp25.000,00 setelah diskon 20%. Sedangkan pilihan kedua adalah potongan harga sebesar Rp25.000,00 dilanjutkan diskon 20% setelah potongan harga. Apakah kedua pilihan penawaran tersebut sama? Jika tidak, pilihan mana yang lebih menguntungkan untuk pembeli?

Pertanyaan tersebut dapat kalian jawab dengan memahami konsep komposisi fungsi.

EkSplorasi 1.3

Masalah Pertama

Perhatikan gambar di bawah ini. Sebuah toko memberikan diskon 20% dan potongan harga Rp25.000,00 untuk suatu produk tertentu.

Gambar 1.19 Diskon dalam Persen dan Potongan Harga

a. Lengkapi tabel di bawah ini.

Harga awal	Diskon 20%	Potongan Rp25.000,00	Harga akhir
Rp100.000,00			
Rp150.000,00			
Rp200.000,00			
Rp250.000,00			
x			

Apakah kalian sudah memahami cara menyelesaikan soal tersebut? Coba buatlah pernyataan fungsi untuk masalah serupa di bawah ini. Jika harga awal adalah x dan harga akhir atau nilai fungsi $f(x) = y$, nyatakan y sebagai suatu fungsi yang memodelkan diskon 30% dilanjutkan dengan potongan harga sebesar Rp10.000,00.

Masalah Kedua

Toko sering memberikan diskon ganda seperti yang ditunjukkan oleh gambar di bawah ini. Harga suatu produk diberi diskon 50% kemudian diberikan diskon lagi 10%.

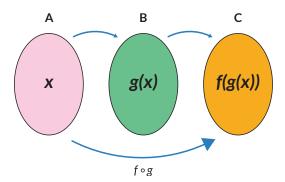
Gambar 1.20 Diskon Ganda

a. Gambarkan mesin fungsi yang menunjukkan pemahaman diskon ganda ini dengan x merupakan harga sebelum diskon ganda dan y adalah harga sesudah diskon ganda. Nyatakan fungsi pertama sebagai $f(x)$ dan fungsi kedua sebagai $g(x)$. Tuliskan hasil akhir sebagai dari operasi kedua fungsi terhadap masukan x.

b. Jika harga barang yang mengalami diskon ganda berkisar dari Rp100.000,00 s.d. Rp1.000.000,00 tentukan domain dan *range* dari fungsi yang merepresentasikan masalah ini.

Kalian perhatikan bahwa dalam menyelesaikan kedua masalah di atas kalian mengoperasikan fungsi pertama dengan masukan adalah harga awal penjualan kemudian hasil fungsi pertama dioperasikan dalam fungsi kedua untuk mendapatkan harga akhir.

Definisi Komposisi Fungsi

Jika $g : A \rightarrow B$ dan $f : B \rightarrow C$ merupakan dua fungsi maka komposisi keduanya $f(g(x))$ dinyatakan dengan notasi $(f \circ g)(x)$ adalah fungsi dari domain A ke kodomain C. Komposisi dua fungsi dapat dipahami melalui diagram panah berikut:

Gambar 1.21 Diagram Panah dari Komposisi Fungsi

Perhatikan contoh yang ada kemudian selesaikan soal.

$f(x) = x + 1$ dan $g(x) = x^2$ maka $h(x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2$
Jika $f(x) = x - 2$ dan $g(x) = \sqrt{x}$ tentukan $h(x) = g(f(x))$.

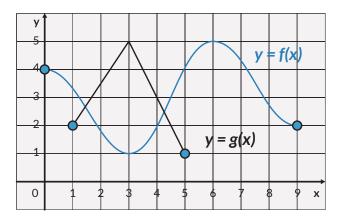
Pertanyaan penting selanjutnya adalah, "Apa syarat agar fungsi f dan g dapat dikomposisikan?"

Eksplorasi 1.4

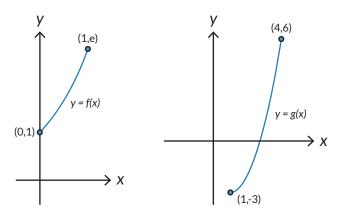
Untuk menjawab syarat agar fungsi f dan g dapat dikomposisikan maka lakukan dua eksplorasi masalah di bawah ini.

Masalah Pertama

Perhatikan dua grafik $f(x)$ dan $g(x)$ pada gambar 1.22.

a. Nyatakan domain dan *range* dari setiap fungsi dalam bentuk himpunan.
b. Nyatakan domain dan *range* jika kedua fungsi dikomposisikan menurut $(f \circ g)(x)$.
c. Nilai-nilai *range* dari $g(x)$ yang dapat digunakan untuk komposisi fungsi $(f \circ g)(x)$.

Gambar 1.22 Domain dan *Range* dari Fungsi Komposisi

Masalah Kedua

Perhatikan kedua grafik di bawah ini. Misalkan, fungsi yang dinyatakan oleh grafik kiri adalah $f(x)$ dan fungsi yang dinyatakan oleh grafik kanan adalah $g(x)$. Apakah kedua fungsi dapat dikomposisikan menurut $(g \circ f)(x)$? Jelaskan jawaban kalian!

Gambar 1.23 Grafik Dua Fungsi

Syarat Komposisi Fungsi

Kedua masalah di atas memberikan pemahaman yang jelas syarat agar dua fungsi dapat dikomposisikan.
Dua fungsi f dan g dapat dikomposisikan sebagai $f \circ g$ jika *range* dari g merupakan **himpunan bagian dari domain** f. Ini merupakan syarat komposisi fungsi.

Pertanyaan menarik lainnya adalah "Apakah operasi komposisi fungsi memenuhi sifat komutatif dan asosiatif?"

Eksplorasi 1.5

Sifat Komutatif

Masalah Pertama

Selidikilah apakah harga setelah diskon 25% yang dilanjutkan dengan diskon 20% sama dengan harga setelah diskon 20% yang dilanjutkan dengan diskon 25%. Apakah berlaku sifat komutatif dalam komposisi fungsi ini?

Masalah Kedua

Selidikilah apakah harga setelah diskon 25% yang dilanjutkan dengan potongan Rp15.000,00 sama dengan harga setelah kena potongan Rp15.000,00 yang dilanjutkan dengan diskon 25%. Apakah berlaku sifat komutatif dalam komposisi fungsi ini?

Masalah Ketiga

Perhatikan tiga fungsi di bawah ini, yaitu f, g dan h:

$f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 + 4$ dan $h(x) = \frac{1}{(x+1)}$

Tentukan domain dan *range* dari masing-masing fungsi!

- Dengan informasi tentang domain dan *range* dari masing-masing fungsi, selidikilah apakah komposisi-komposisi di bawah ini merupakan fungsi: $g \circ f, f \circ g, f \circ h, h \circ f, g \circ h, h \circ g$!
- Mari cek apakah komposisi-komposisi di atas bersifat komutatif!
  a. $g \circ f = f \circ g$?
  b. $f \circ h = h \circ f$?
  c. $g \circ h = h \circ g$?

Berdasarkan Eksplorasi 1.5 ternyata **komposisi fungsi secara umum tidak memenuhi sifat komutatif.**

Sifat Asosiatif

Eksplorasi dilakukan untuk mengecek apakah operasi komposisi fungsi memenuhi sifat asosiatif.

Perhatikan kembali tiga fungsi di bawah ini, yaitu f, g dan h:

$f(x) = 2x + 1,\ g(x) = x^2 + 4$ dan $h(x) = \frac{1}{(x+1)}$

1. Selidikilah apakah operasi asosiatif secara umum berlaku untuk komposisi fungsi, dengan kata lain cek apakah persamaan-persamaan berikut benar:
    - $(f(h \circ g))(x) = ((f \circ h) \circ g)(x)$?
    - $(h(f \circ g))(x) = ((h \circ f) \circ g)(x)$?
    - $(g(f \circ h))(x) = ((g \circ f) \circ h)(x)$?
2. Pikirkan konfigurasi komposisi lain yang mungkin dari ketiga fungsi di atas. Cek apakah sifat asosiatif masih terpenuhi.

Berdasarkan Eksplorasi 1.5 **ternyata komposisi fungsi memenuhi sifat asosiatif.**

Komposisi dua fungsi injektif dan dua fungsi surjektif

Untuk memahami fungi injektif dan fungsi surjektif lihat halaman 32 dan 33.

Ayo Bekerja Sama

- Misalkan $g : A \to B$ dan $f : B \to C$ merupakan dua fungsi injektif. Apakah fungsi komposisi $f \circ g$ juga bersifat injektif? Berikan alasanmu!
- Misalkan $g : A \to B$ dan $f : B \to C$ merupakan dua fungsi surjektif. Apakah fungsi komposisi $f \circ g$ juga bersifat surjektif? Berikan alasanmu!

Latihan 1.4

1. Jika $f(x) = \frac{1}{x}$ dan $g(x) = 2x + 1$, tentukan
    a. $(f \circ g)(x)$.
    b. $(f \circ g)(3)$ dan $(f \circ g)(-3)$.
    c. $f(a)$ jika $(f \circ g)(a) = -1$.
2. Jika $f(x) = \frac{1}{(2x+1)}$ dan $g(x) = 2x^2 + 1$, tentukan
    a. $(f \circ g)(x)$.
    b. $(g \circ f)(x)$.

c. domain dan *range* dari $(f \circ g)\ (x)$.

d. domain dan *range* dari $(g \circ f)\ (x)$.

3. Jika $f(x) = 6x - 5$ dan $g(x) = ax + b$, tentukan a dan b sehingga $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

4. Hasil dari $(f \circ g)(x) = (2x + 3)^3$ sedangkan $f(x) = x^3$ tentukan $g(x)$.

5. Lengkapi tabel di bawah ini.

x	$f(x)$
-2	-1
-1	
0	1
1	
2	3

$f(x)$	$g(f(x))$
-1	0,5
0	1
1	2
2	
3	

x	$g(f(x))$
-2	
-1	
0	
1	
2	

6. Jika $f(3) = 7, \quad g(3) = 6, \quad f(6) = 13, \quad g(6) = 12$, tentukan $(f \circ g)\ (3)$.

7. Jumlah kertas yang diperlukan untuk mencetak x eksemplar modul matematika dinyatakan dalam fungsi $k(x) = 250(x + 1)$ lembar. Biaya pencetakan yang diperlukan untuk k lembar adalah $b(k) = 400k + 20.000$ (dalam rupiah). Jika pengeluaran hari ini untuk mencetak x eksemplar modul adalah Rp10.120.000,00 tentukan banyak eksemplar modul yang dicetak.

8. Suatu pabrik memberikan ketentuan mengenai jumlah produksi dan jenisnya. Produksi telepon genggam berbasis android adalah dua kali produksi telepon genggam berbasis bukan android sedangkan produksi laptop adalah tiga kali produksi telepon genggam berbasis android.

   a. Gunakan mesin fungsi untuk menyatakan fungsinya.

   b. Jika diproduksi 2.000 telepon genggam tidak berbasis android, berapa banyak laptop yang dihasilkan? Selesaikan dengan mesin fungsi.

9. Anton membeli sebuah meja belajar dari sebuah toko. Ada banyak pilihan meja dengan harga-harga yang bervariasi. Meja-meja tersebut berukuran besar. Karena ukuran mobil Anton kecil, maka Anton memutuskan untuk menyewa jasa antar dari toko tersebut. Setelah berdiskusi dengan pihak toko, maka total biaya yang harus dibayar adalah harga meja belajar, pajak pembelian, dan biaya angkut. Pajak pembelian sebesar 7,5% harga meja. Biaya angkut sebesar Rp20.000,00.

   a. Tuliskan fungsi $t(x)$ sebagai total harga meja yang mencakup harga meja dan pajak, dengan x adalah harga satu meja.

   b. Tuliskan juga fungsi $f(x)$ sebagai total biaya yang mencakup harga meja dan biaya angkut.

c. Tuliskan kedua komposisi fungsi berikut $(f \circ t)(x)$ dan $(t \circ f)(x)$. Manakah dari kedua fungsi yang memberikan biaya yang lebih kecil untuk setiap harga meja?

d. Peraturan daerah di tempat Anton tinggal tidak melegalkan pengenaan pajak pada biaya angkut. Komposisi fungsi yang mana dari bagian c yang sejalan dengan perda ini?

C. Fungsi Invers

Kalian pasti sering menemukan bahasa Inggris dalam kehidupan sehari-hari, baik lewat film, berita, cerita ataupun lagu. Kalian memahami artinya dengan menerjemahkan ke dalam bahasa Indonesia.

Gambar 1.24 Mesin Penerjemahan Bahasa

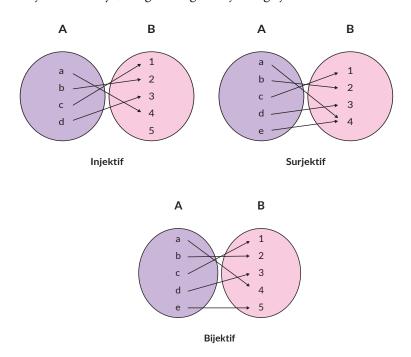
- Dapatkah kalian menerjemahkan nama mata pelajaran (sebaliknya) dari bahasa Indonesia ke dalam dalam bahasa Inggris?
- Apakah proses kebalikan dapat kalian terapkan juga untuk semua relasi?

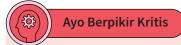
Berdasarkan Gambar 1.24, dapat diamati bahwa dengan membalikkan arah panah, untuk setiap mata pelajaran dalam bahasa Indonesia (keluaran), kalian bisa mencari kata yang mempunyai arti yang sama dalam bahasa Inggris (masukan). Prosedur ini membentuk suatu relasi kebalikan (*invers*) antara anggota-anggota keluaran dan masukan. Apakah relasi kebalikan ini berlaku juga pada fungsi? Apakah relasi kebalikan membentuk sebuah fungsi yang dikenal dengan fungsi *invers?* Pertanyaan ini akan bisa kalian jawab dengan memahami terlebih dahulu fungsi injektif, surjektif, dan bijektif.

1. Fungsi Injektif, Surjektif, dan Bijektif

Perhatikan kembali Gambar 1.9 dan 1.11. Pada grafik 1.9 ketika waktu = 6 detik dan 7 detik pelari memiliki kecepatan yang sama, yaitu 12 m/det. Pada grafik 1.11 terlihat bahwa jumlah bahan bakar berbeda menghasilkan jarak tempuh berbeda.

Gambar 1.25 di bawah ini menunjukkan jenis relasi yang berbeda. Menurut kalian, relasi mana dalam Gambar 1.25 yang menunjukkan grafik 1.9 dan grafik 1.11?

Berdasarkan jenis relasinya, fungsi dibagi menjadi tiga jenis:

Gambar 1.25 Fungsi Injektif, Fungsi Surjektif, dan Fungsi Bijektif

Jelaskan pengertian fungsi injektif, fungsi surjektif, dan fungsi bijektif dengan kata-katamu sendiri.

Setujukah kalian dengan pendapat bahwa fungsi kuadrat dan fungsi eksponensial merupakan fungsi bijektif? Jelaskan alasannya.

Pertanyaan di atas dapat kalian jawab dengan menggunakan definisi fungsi yang telah dipelajari dan dengan mengkaji domain dan *range*.

Fungsi seperti apa yang memiliki kebalikan atau *invers*? Secara umum **tidak semua fungsi memiliki fungsi *invers***. Hanya fungsi **bijektif (injektif dan surjektif) saja yang memiliki *invers***.

Ayo Berkomunikasi

Mengapa hanya fungsi bijektif saja yang dapat memiliki *invers*? Pikirkanlah dengan teman-temanmu.

Sebuah fungsi bisa dibuat bijektif dengan cara memodifikasi *range*-nya. Sebelum kalian berdiskusi tentang ini lebih jauh, coba jawab pertanyaan berikut ini. Bagaimana hubungan antara domain dan *range* dari fungsi asli dan fungsi *invers*-nya (jika ada)?

Eksplorasi 1.6

Kalian akan menyelidiki fungsi yang merupakan kebalikan dari suatu fungsi dengan memecahkan dua masalah di bawah ini.

Masalah Pertama

Perhatikan tabel harga baju kaos di bawah ini.

Jumlah Baju Kaos (Masukan)	Harga Baju Kaos (Keluaran)
1	55.000
3	165.000
5	275.000
10	550.000

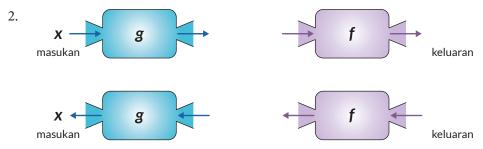
1. Buatlah tabel dengan membalikkan keluaran menjadi masukan dan masukan menjadi keluaran.
2. Buatlah grafik jumlah baju kaos terhadap harga baju kaos dan grafik harga baju kaos terhadap jumlah baju kaos. Jelaskan hasil yang kamu peroleh.
3. Tentukan domain dan *range* dari kedua grafik yang dihasilkan di nomor (2).

4. Buatlah diagram panah yang menunjukkan fungsi asal.
5. Buatlah diagram panah yang menunjukkan fungsi yang berkebalikan dari fungsi asalnya.

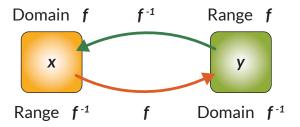
Apa yang kalian peroleh dari eksplorasi di atas?

Masalah Kedua

Harga suatu pakaian setelah mendapatkan diskon 40% dan kemudian diberikan potongan harga Rp15.000,00 adalah Rp45.000,00. Berapa harga awal pakaian?

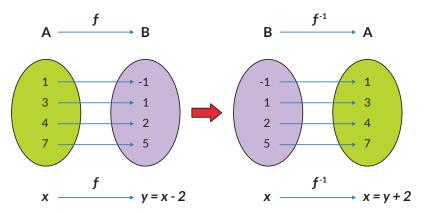
1. Gunakan mesin fungsi untuk menyelesaikan masalah ini. Mulai kerjakan dari fungsi kedua yang dilanjutkan dengan fungsi pertama. Kerjakan secara terbalik.
2.

3. Jika harga awal pakaian adalah x dan hasil akhirnya adalah y maka buatlah fungsi kebalikannya yaitu x adalah fungsi dari y.

Fungsi yang berkebalikan operasinya dari fungsi asalnya disebut sebagai **fungsi *invers***. Fungsi ini memetakan anggota yang ada di *range* fungsi asal ke anggota yang ada di domain fungsi asal. Fungsi *invers* dituliskan sebagai f^{-1}. Kalian perhatikan bahwa -1 di sini bukan merupakan suatu pangkat.

Dari definisi fungsi *invers* yang baru dijelaskan sebelumnya, hubungan antara domain dan *range* dari fungsi asal dan fungsi *invers* dapat dipahami melalui diagram panah berikut.

Gambar 1.26 Domain dan *Range* dari Fungsi Asal dan Fungsi *Invers*

Secara konsep, menentukan fungsi *invers* dari fungsi asal dengan diagram panah memang lebih intuitif; dengan membalik arah panah. Namun, sering kali dijumpai bahwa fungsi asal dituliskan dalam bentuk persamaan matematis. Dalam kasus ini, cara untuk menemukan persamaan fungsi *invers* dari fungsi asal dapat dilakukan dengan cara berikut:

1. Ubah $y = f(x)$ menjadi bentuk $x = f(y)$.
2. Ubah persamaan $x = f(y)$ menjadi bentuk $y = \ldots$.
3. Ubahlah variabel y dengan $f^{-1}(x)$ sehingga diperoleh rumus fungsi *invers* $f^{-1}(x)$.

Perhatikan gambar yang menunjukkan fungsi dan fungsi *invers*-nya. Gunakan langkah-langkah di atas untuk menemukan fungsi *invers* dari f.

Gambar 1.27 Domain dan *Range* dari $y = x - 2$ dan $x = y + 2$.

Ayo Berkomunikasi

Sejauh ini, ketika menjelaskan fungsi *invers* dari fungsi asal, selalu diasumsikan bahwa fungsi asal memiliki *invers*. Secara umum, "Apakah benar semua fungsi selalu mempunyai *invers*? Kalau tidak, apa syarat untuk sebuah fungsi memiliki *invers*?"

Eksplorasi 1.7

Masalah berikut ini akan membantu kalian memahami syarat sebuah fungsi untuk memiliki *invers*.

Sebuah mobil melaju di jalan raya. Kecepatan tiap menit diukur dan dicatat dalam tabel di bawah ini:

Tabel 1.3 Kecepatan Mobil Terhadap Waktu

Waktu (menit) (x)	Kecepatan Mobil (m/menit) (y)
1	100
2	180
3	193
4	185
5	180
6	165
7	175
8	186
9	190
10	166

Dari data pada Tabel 1.3, jawablah pertanyaan berikut:

1. Apakah data waktu dan kecepatan membentuk relasi? Jika ya, apakah relasi itu adalah fungsi?
2. Plot data dengan sumbu x adalah waktu dan sumbu sumbu y adalah kecepatan.
3. Sekarang, kalian tentukan *invers* relasi dari pertanyaan 1.
4. Dari definisi fungsi yang kalian pelajari, apakah *invers* relasi pada pertanyaan (3) adalah fungsi? Jelaskan alasanmu.
5. Apabila pada menit ke-5 kecepatan diubah menjadi 182 m/menit, apakah relasi antara waktu dan kecepatan merupakan relasi surjektif dan injektif?
6. Dengan perubahan ini, apakah *invers* relasi adalah fungsi? Jika ya, apakah fungsi injektif dan surjektif (bijektif)?

Tahukah Kamu?

Misalkan, f dan g adalah fungsi. Jika $(f \circ g)(x) = x$ dan $(g \circ f)(x) = x$ maka g adalah fungsi *invers* dari f dan f adalah fungsi *invers* dari g.

Ayo Berpikir Kritis

Setujukah kalian bahwa konversi satuan merupakan fungsi yang mempunyai *invers*? Jelaskan jawaban kalian.
Berikan satu contoh konversi satuan, tentukan juga domain dan *range*-nya.

Eksplorasi 1.8

Kalian akan menyelidiki *invers* dari komposisi fungsi.

Sebuah toko mainan memberikan potongan harga berupa diskon 20% dan dilanjutkan dengan potongan harga Rp10.000,00. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut!

1. Jika $f : A \rightarrow B$ dipahami sebagai fungsi harga setelah diskon 20%, dimana A adalah domain harga asal, dan B adalah kodomain dengan anggota harga setelah diskon. Maka tuliskan persamaan matematis untuk fungsi ini.
2. Jika $g : B \rightarrow C$ sebagai fungsi potongan harga Rp10.000,00 setelah diskon 20%, dengan C adalah kodomain dengan anggota harga akhir. Maka tuliskan persamaan matematis untuk fungsi ini.
3. Apakah benar harga akhir dapat diperoleh dengan cukup menggunakan fungsi $(g \circ f)(x)$? Jelaskan alasanmu.
4. Apakah bedanya fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$?
5. Misal fungsi $(g \circ f)(x)$ memiliki *invers*. Jika diketahui harga akhir mainan, coba tuliskan fungsi yang dapat digunakan untuk memperoleh harga asal (gunakan fungsi *invers* dari g dan f lalu komposisikan).
6. Gunakan fungsi dari nomor 5, untuk mengetahui harga asal mainan jika diketahui harga akhir sebesar Rp30.000,00.

7.

Apakah benar secara umum, jika $(g \circ f)(x)$ memiliki *invers* maka $(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$?

Latihan 1.5

1. Gambarkan fungsi-fungsi di bawah ini dan tentukan apakah fungsi-fungsi tersebut mempunyai fungsi *invers*. Jelaskan alasanmu.

   a. $f(x) = x^2$ b. $f(x) = 2^x$ c. $f(x) = \sqrt{2x}$

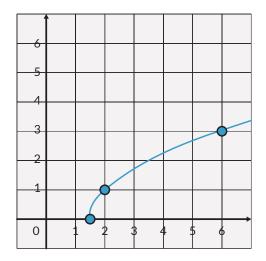
2. Tentukan fungsi *invers* (jika ada) dari fungsi-fungsi di bawah ini, juga domain dan *range*-nya.

   a. $f(x) = x^3$

   b. $f(x) = -3x + 1$

   c. $f(x) = \sqrt{x-3}$

   d. $f(x) = \frac{x+4}{2x-5}$

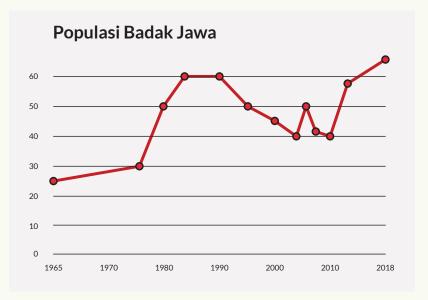
3. Berikut ini adalah grafik dari fungsi $g(x) = \sqrt{2x-3}$,

   a. Gambarkan grafik dari *invers* fungsi $g(x)$ dengan pencerminan terhadap $y = x$

   b. Temukan persamaan matematis untuk fungsi *invers* $g^{-1}(x)$.

c. Plotlah dengan menggunakan beberapa titik fungsi *invers* $g^{-1}(x)$.

d. Bandingkan apakah grafik yang diperoleh sama dengan grafik pada bagian (a).

4. Diketahui $f(x) = 2x + b$ dan $f(f(x)) = 4x + 6$. Tentukan nilai b dan $f^{-1}(x)$.

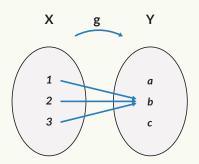
5. Populasi badak Jawa terhadap waktu diberikan pada grafik di bawah ini.

Sumber: www.ourworldindata.org (2021)

Apakah grafik ini menunjukkan fungsi bijektif atau surjektif? Jelaskan.

Refleksi

1. Apakah saya sudah dapat membedakan fungsi dengan bukan fungsi dengan beberapa cara?
2. Bagaimana saya menentukan domain, kodomain, dan *range* dari suatu fungsi?
3. Bagaimana saya menentukan dua fungsi atau lebih dapat dikomposisi?
4. Apakah saya dapat membedakan fungsi injektif, fungsi surjektif, dan fungsi bijektif?
5. Bagaimana saya dapat menentukan suatu fungsi dapat mempunyai *invers*?

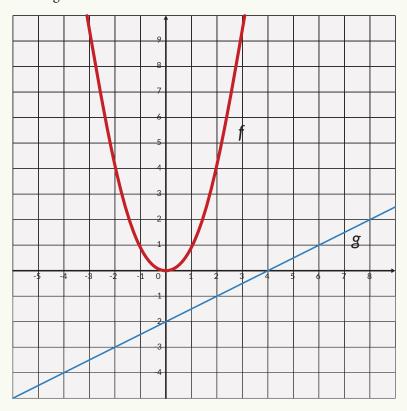
Uji Kompetensi

1. Hubungan antara keuntungan yang diperoleh dengan harga barang yang dijual diberikan sebagai $U(x) = -75x^2 + 300x - 140$, di mana x adalah harga barang dalam kelipatan Rp10.000,00.
   a. Apakah $U(x)$ merupakan suatu fungsi? Jelaskan.
   b. Jika $U(x)$ merupakan suatu fungsi, tentukan domain dan *range*-nya.
   c. Jika diinginkan keuntungan tertentu dapatkah diketahui harga barang?
   d. Jika $U(x)$ merupakan suatu fungsi, apakah fungsi ini mempunyai *invers*? Jelaskan.
2. Berikan satu contoh situasi nyata yang bisa diberikan dalam fungsi di mana fungsi tersebut mempunyai *invers*.
3. Berikan satu contoh situasi nyata yang mana suatu fungsi tersebut tidak mempunyai *invers*.
4. Berikan satu contoh situasi nyata yang bisa diberikan dalam komposisi fungsi.
5. Perhatikan diagram panah di bawah ini.
   Apakah fungsi $g(x)$ mempunyai fungsi *invers*? Jelaskan.

6. Perhatikan percakapan di bawah ini .

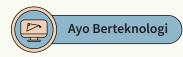
   Anton : Suatu fungsi dapat dipastikan mempunyai fungsi *invers* atau tidak dengan menggunakan diagram panah.

   Toni : Saya tidak setuju karena diagram panah tidak memberikan informasi lengkap.

   Setujukah kamu dengan pendapat keduanya? Adakah pendapatmu yang diperlukan untuk melengkapi kedua pendapat tersebut?

7. Perhatikan kedua grafik di bawah ini.

   a. Tentukan nilai $(f \circ g)(2)$
   b. Tentukan nilai yang menyebabkan $(f \circ g)\ (x) = 4$
   c. Apakah $(f \circ g)(x)$ berupa fungsi linear atau kuadrat? Jelaskan.
   d. Apakah $(g \circ f)(x)$ berupa fungsi linear atau kuadrat? Jelaskan.
   e. Apa yang harus dilakukan dengan domain $f(x)$ jika diinginkan $f(x)$ mempunyai *invers*?

8. Perhatikan $f\ (x) = 3x + 1$ dan $g(x) = \frac{(x-1)}{3}$.
    a. Gambarkan kedua fungsi tersebut pada satu sistem koordinat.
    b. Lakukan fungsi komposisi $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$. Jelaskan hasil yang diperoleh.
    c. Berdasarkan hasil a dan b apakah yang dapat disimpulkan?
9. *Hang time* menunjukkan lamanya seseorang berada di udara setelah melompat hingga ketinggian tertentu. Makin tinggi lompatan makin lama seseorang berada di udara. Atlet-atlet olahraga tertentu, seperti bola basket, memerlukan *hang time* agar dapat memasukkan bola.
    a. Tentukan hubungan antara ketinggian lompatan dengan *hang time* dalam bentuk fungsi.
    b. Mengapa fungsi *invers* diperlukan dalam masalah ini? Jelaskan.
    c. Carilah *hang time* dari seorang pemain basket dunia.

Pengayaan

Tentukan *hang time* dan ketinggian lompat dari beberapa orang, dapat anggota keluargamu atau temanmu. Kalian dapat mengambil data dengan menanyakan kepada mereka, tanpa harus mengukur waktu dan ketinggian mereka secara langsung.

1. Buatlah tabel dan plot grafiknya. Kalian dapat menggunakan *Microsoft Excel* untuk membuatnya.
2. Pilih satu *hang time* dan ketinggian lompat yang bersesuaian dengannya dari seorang atlet, lalu cocokkan dengan grafik yang kamu buat. Apakah sesuai?
3. Jika *hang time* merupakan fungsi dari ketinggian lompat, pikirkan satu hal yang memengaruhi ketinggian lompat. Nyatakan semua hubungan ini dalam mesin fungsi komposisi.

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2021

Matematika untuk SMA/SMK Kelas XI

Penulis: Dicky Susanto, dkk.

ISBN: 978-602-244-789-5 (jil.2)

Bab 2

Lingkaran

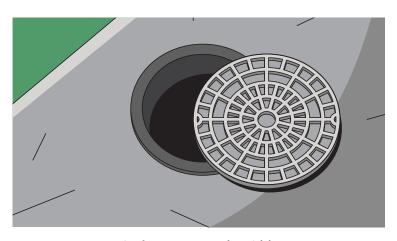
Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan kalian dapat

1. Menerapkan teorema lingkaran dalam menyelesaikan permasalahan yang terkait
2. Membuktikan teorema yang berhubungan dengan lingkaran
3. Menemukan sifat-sifat garis singgung pada lingkaran
4. Menemukan sifat-sifat segiempat tali busur

Gambar 2.1 Sepeda dengan Berbagai Bentuk Roda

Ayo Berpikir Kritis

Roda sepeda umumnya berbentuk lingkaran. Pernahkah kalian bertanya kenapa? Apa yang terjadi jika roda sepeda tidak berbentuk lingkaran?

Gambar 2.2 Penutup Lubang Selokan

Ayo Berpikir Kritis

Lubang untuk memeriksa selokan (lihat Gambar 2.2) umumnya berbentuk lingkaran. Bagaimana kaitan bentuk lingkaran dengan keselamatan pekerja yang sedang berada di dalam? Apa yang terjadi jika tutup lubang bentuknya bangun datar yang berbeda? Bagaimana jika tutupnya berbentuk persegi? Bagaimana jika persegi panjang?

Tahukah Kamu?

- Pythagoras adalah matematikawan yang hidup pada abad keenam Sebelum Masehi. Para pengikutnya membentuk sebuah sekte tertutup yang disebut Pythagoreans. Pengikut sekte ini menganggap lingkaran sebagai bangun yang sempurna.
- Archimedes adalah matematikawan Yunani kuno yang hidup pada abad ketiga Sebelum Masehi. Menurut legenda, Archimedes sedang berkonsentrasi penuh mempelajari lingkaran (yang digambarkan pada pasir di hadapannya) saat kota tempat tinggalnya dikalahkan dalam perang. Pasukan lawan (yang ditugaskan membawa Archimedes pada pemimpin mereka) menanyakan identitasnya. Archimedes (yang konsentrasinya terganggu oleh kehadiran mereka) menjawab dengan gusar, “Jangan ganggu lingkaran saya!” Kalimat tersebut disebut sebagai kata-kata terakhir Archimedes.

Pada bab ini kalian akan mempelajari tentang lingkaran dan teorema-teorema yang berhubungan dengan lingkaran. Kalian juga akan menerapkan teorema-teorema itu untuk menyelesaikan masalah yang terkait dengan lingkaran.

Pertanyaan pemantik

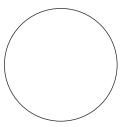
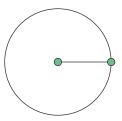
- Mengapa roda sepeda berbentuk lingkaran?
- Apa saja sifat-sifat lingkaran?
- Apakah semua lingkaran sebangun?
- Bangun datar yang seperti apa yang semua titik sudutnya terletak pada lingkaran?

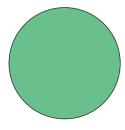
Kata Kunci

Lingkaran, jari-jari, diameter, sudut pusat, sudut keliling, busur lingkaran, garis singgung, tali busur, segiempat tali busur, teorema Thales, teorema Ptolemeus

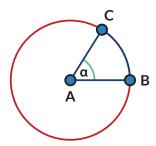
Peta Konsep

Gambarkan sebuah titik pada kertas, beri nama titik O. Ambil penggaris dan tandai sebuah titik yang berjarak 2 cm dari titik O (beri nama titik A). Tandai titik lain yang berjarak 2 cm dari titik O. Gambarkan 10 titik lain yang berjarak 2 cm dari titik O.

1. Jika **semua** (termasuk titik-titik lain yang belum kalian gambarkan) titik yang berjarak 2 cm dari titik O dihubungkan, bangun datar apa yang kalian dapatkan?
2. Titik O disebut apa untuk bangun datar tersebut?
3. Jarak 2 cm itu disebut apa bagi bangun datar tersebut?

Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya sama dari suatu titik tertentu (disebut **pusat** lingkaran). Jarak yang sama itu disebut **jari-jari**.

Ruas garis yang menghubungkan pusat lingkaran dengan salah satu titik pada lingkaran juga disebut **jari-jari**.

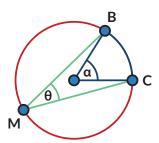
Daerah yang dibatasi oleh lingkaran disebut **daerah lingkaran**.

A. Lingkaran dan Busur Lingkaran

Gambar 2.3 Mercusuar

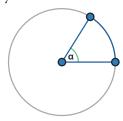
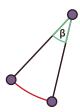
Pada masa sebelum adanya GPS (*Global Positioning System*), mercusuar dibangun untuk menolong kapal bernavigasi sehingga tidak menabrak karang. Daerah yang diterangi oleh lampu mercusuar berbentuk daerah lingkaran. Kapal bernavigasi dengan memanfaatkan perhitungan sudut yang akurat sehingga dapat berlayar dengan aman.

Bagian dari lingkaran disebut **busur lingkaran**. Busur yang lebih kecil disebut busur minor (pada gambar berwarna biru) dan bagian yang lebih besar disebut busur mayor (berwarna merah).
Jika hanya disebutkan kata busur, maka yang dimaksud adalah busur minor.

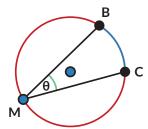
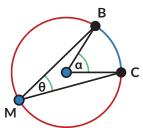
Busur BC dituliskan $\overset{\frown}{BC}$. Besarnya $\overset{\frown}{BC}$ ditentukan oleh besarnya $\angle BAC = \alpha$ (Titik A adalah pusat lingkaran).

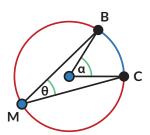
Dalam matematika,

- Sudut α disebut **sudut pusat** yang menghadap pada $\overset{\frown}{BC}$.
  Sudut pusat adalah sudut yang titik sudutnya terletak pada pusat lingkaran dan kaki-kaki sudutnya adalah jari-jari lingkaran.

- Sudut θ disebut **sudut keliling** yang menghadap pada $\overset{\frown}{BC}$.
  Sudut keliling adalah sudut yang titik sudutnya terletak pada lingkaran dan kaki-kaki sudutnya berupa tali busur.
  Apakah kalian ingat apa yang dimaksud tali busur? **Tali busur** adalah ruas garis yang menghubungkan dua titik pada lingkaran.

Eksplorasi 2.1

Sebuah kolam berbentuk lingkaran. Pada salah satu bagian kolam ada perosotan. Pengelola ingin meletakkan lampu sehingga daerah perosotan selalu terang. Jika daerah yang ingin diterangi ditampilkan sebagai busur lingkaran berwarna biru. Busur lingkaran tersebut besarnya α.

Setiap lampu yang diproduksi oleh pabrik Q dapat menyinari daerah dengan jarak tertentu dan sudut penyinaran tertentu (β).

Jika semua lampu yang ada dalam gudang pengelola kolam dapat menyinari jarak yang dibutuhkan, bantulah pengelola taman memilih sudut penyinaran yang tepat.

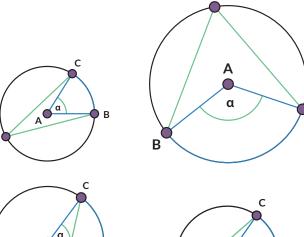
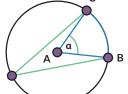
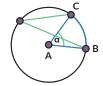
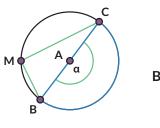
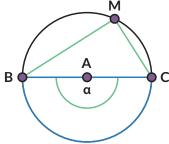
1. Lampu taman dengan sudut penyinaran 30° diletakkan pada titik M dan dapat menerangi perosotan pada $\overset{\frown}{BC}$ Di mana saja pengelola dapat memasang lampu yang sama dan tetap menyinari perosotan pada $\overset{\frown}{BC}$?

2. Jika lampu diletakkan di pusat kolam dan ingin menyorot $\overset{\frown}{BC}$, apakah lampu dengan sudut penyinaran 30° dapat digunakan? Jika tidak, berapa sudut yang dibutuhkan?

3. Jika ukuran perosotan berubah ($\overset{\frown}{BC}$) bagaimana pengaruhnya terhadap perubahan sudut penyinaran yang dibutuhkan?

α	θ

Kalian dapat melakukan Eksplorasi 2.1 dengan cara:

Ayo Berteknologi

Jika tersedia, disarankan menggunakan aplikasi semacam *GeoGebra* atau *Desmos*.
https://www.geogebra.org/m/cjdyK8UR#material/UT4sXfYW dan
https://www.geogebra.org/m/cjdyK8UR#material/VGNfTTEu

Ayo Bekerja Sama

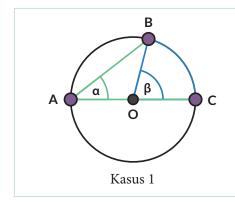
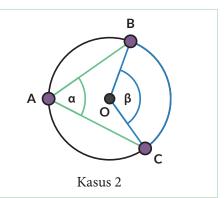
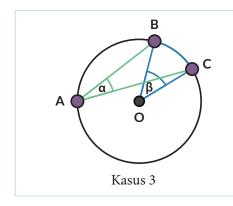
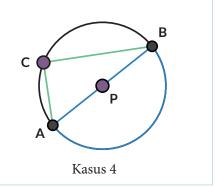
Kalian dapat mengerjakannya secara berkelompok. Setiap siswa menyelidiki gambar yang berbeda. Setelah itu diskusikan hasilnya.

Temuan:

- Sudut pusat besarnya ___________________ kali sudut keliling yang menghadap ke busur lingkaran yang sama.
- Sudut keliling yang menghadap ke busur yang sama besarnya ______________.
- Sudut keliling yang menghadap ke diameter besarnya ___________________.

Pembuktian

Rani dan Nyoman juga ingin membuktikan hasil pengamatan mereka tentang hubungan sudut pusat dan sudut keliling pada lingkaran.

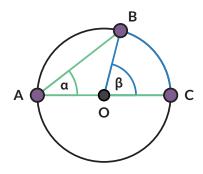
Nyoman mengusulkan bahwa ada empat kemungkinan.

Kasus 1	Kasus 2

Kasus 3

Kasus 4

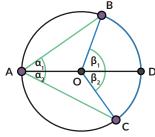
- **Kasus 1**

  Pertama-tama perhatikan kasus khusus saat $\overline{AC}$ melalui titik O.

  Ingat bahwa $\overline{AC}$ artinya ruas garis AC.

Bukti:

panjang $\overline{OA}$ = panjang $\overline{OB}$	(jari-jari lingkaran) maka ___________ sama kaki.
$\angle OAB = \angle$ ___________	(karena $\triangle AOB$ sama kaki)
$\angle AOB =$ _____________ …..(1)	(jumlah sudut dalam $\triangle AOB$ adalah $180°$)
$\angle AOB =$ _____________ …..(2)	($\angle AOB$ adalah pelurus $\angle BOC$)
$\beta =$ ___________	Gabungkan (1) dan (2) untuk membuktikan.

- **Kasus 2**

  Sekarang perhatikan kasus yang lebih umum, saat $\overline{AC}$ tidak melalui pusat lingkaran.

  Tarik $\overline{AD}$ melalui titik O, membelah α menjadi $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$

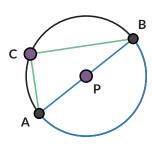
Dengan cara yang sama dengan Kasus 1	$\beta_1 = 2\alpha_1$	...... (1)
Dengan cara serupa	$\beta_2 = 2\alpha_2$	...... (2)
Gunakan (1) dan (2)	$\beta = \beta_1 + \beta_2$ $= \ldots\ldots$	

- **Kasus 3**

  akan kalian lakukan pada Latihan 2.1 no. 1.

- **Kasus 4**

  Kasus 4 adalah kasus khusus untuk sudut keliling yang menghadap pada diameter lingkaran ($\angle ACB$).

  Bukti:

1. Gambarkan jari-jari $\overline{PC}$. Segitiga jenis apakah $\triangle APC$ dan $\triangle BPC$? Bagaimana kalian tahu?
2. Nyatakan besarnya sudut-sudut yang sama pada $\triangle APC$ sebagai x° dan besarnya sudut-sudut yang sama pada $\triangle BPC$ sebagai y°, tuliskan sudut-sudut pada $\triangle ABC$ dalam x° dan y°.

   a. $\angle A = \ldots$ b. $\angle B = \ldots$ c. $\angle C = \ldots$

3. Apa yang kalian ketahui tentang sudut-sudut pada segitiga yang dapat digunakan untuk menentukan besarnya $\angle ACB$?
$\angle ACB = \ldots$

Tahukah Kamu?

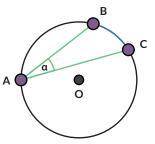
Kasus 4 dikenal dengan nama Teorema Thales.

Thales adalah orang Yunani yang menjadi matematikawan, ahli astronomi, dan filsuf. Dalam Matematika, Thales adalah orang pertama yang menerapkan argumentasi deduktif dalam geometri. Dia adalah orang pertama yang namanya disematkan pada teorema.

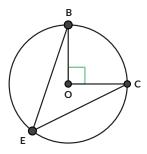
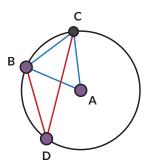
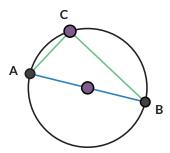
sumber: en.wikipedia.org/Wilhelm Meyer (2021)

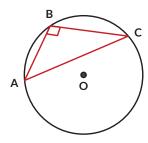
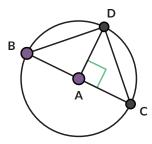
Teorema Thales:
Jika tiga titik A, B, C terletak pada lingkaran dan AB adalah diameter, maka $\angle ACB$ siku-siku.

Latihan 2.1

1. Ini adalah Kasus 3 dari bukti Eksplorasi 2.1.

a. Gambarkan sudut pusat yang menghadap ke busur yang sama dengan sudut keliling $\angle BAC$.
b. Apakah pada lingkaran berikut juga berlaku bahwa sudut pusat besarnya dua kali lipat sudut keliling? Buktikan.

Buatlah diameter yang melalui titik A dan titik O.

2. Jika $\angle BOC = 90°$, berapakah besar $\angle BEC$?

3. Lingkaran A berjari-jari 2 satuan. Jika panjang $\overline{BC} = 2$, tentukan besar $\angle BDC$

4. $\overline{AB}$ adalah diameter pada lingkaran berikut. Jari-jari lingkaran 8,5 cm dan panjang $\overline{AC}$ = 8 cm. Tentukan:

a. besar $\angle ACB$
b. panjang $\overline{AB}$
c. panjang $\overline{BC}$

5. Apa yang salah pada gambar berikut?

6. Lingkaran A berjari-jari 2 cm. Tentukan:

a. besar $\angle BDC$

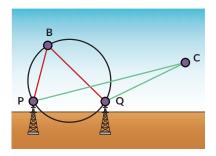
b. jika $\angle CAD = 90°$, tentukan besar $\angle ACD$.

c. panjang $\overline{CD}$

7. **Ayo Berpikir Kreatif**

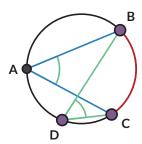
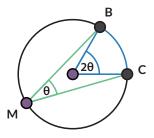
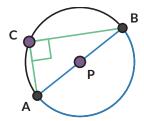
Jelaskan cara memanfaatkan alat gambar teknik berbentuk T ini untuk menentukan letak titik pusat piring.

8. **Ayo Berpikir Kritis**

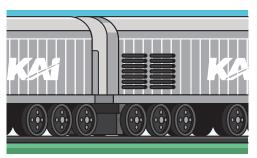
Pada gambar berikut, titik P dan titik Q adalah mercusuar. Daerah dengan karang berbahaya telah dipetakan dan lingkaran menyatakan daerah berbahaya tersebut. Kapal diharapkan tidak memasuki daerah lingkaran untuk menghindari kemungkinan kandas.

Pelajari sudut yang dibentuk antara cahaya dari kedua mercusuar ($\angle PCQ$) jika kapal berada di luar lingkaran/pada lingkaran/di dalam lingkaran. Menurutmu, informasi apa yang perlu diketahui kapten kapal tentang lokasi ini untuk memastikan kapalnya tidak kandas?

Rangkuman

Sifat-sifat sudut pada lingkaran:

1. Sudut keliling yang menghadap pada busur yang sama, besarnya sama.

2. Sudut pusat besarnya dua kali sudut keliling yang menghadap pada busur yang sama.

3. Sudut keliling yang menghadap pada diameter lingkaran, adalah sudut siku-siku.

Ayo Berefleksi

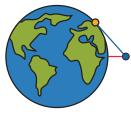
1. Apakah saya memahami hubungan sudut keliling dan busur lingkaran?
2. Apakah saya memahami hubungan sudut keliling dan sudut pusat?
3. Apakah saya bisa mengerjakan soal-soal yang terkait dengan sudut keliling dan sudut pusat lingkaran?

B. Lingkaran dan Garis Singgung

Gambar 2.4 Roda Kereta Api

Roda kereta api menyentuh rel kereta di satu titik. Secara matematis dikatakan bahwa rel adalah **garis singgung** roda dan titik sentuhnya disebut sebagai **titik singgung**.

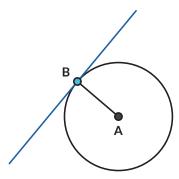
Eksplorasi 2.2

Ayo Bereksplorasi

Dalam tugasnya, seorang navigator pada kapal laut perlu menghitung jarak pelabuhan yang berada pada cakrawala.

Gambar 2.5 Cakrawala

Titik biru mewakili posisi navigator pada kapal, titik oranye adalah pelabuhan yang tampak di cakrawala. Garis merah adalah jarak navigator ke permukaan air. Garis biru mewakili pandangan navigator ke pelabuhan, secara matematis merupakan garis singgung. Mari bereksplorasi menyelidiki sifat-sifat garis singgung.

1. Pelabuhan pertama kali terlihat sebagai sebuah titik di kejauhan. Garis singgung menyentuh lingkaran pada tepat satu titik (disebut titik singgung). Gunakan busur derajat untuk mengukur besar sudut yang dibentuk oleh garis singgung dan jari-jari lingkaran (pada titik singgung).

   Sudut yang dibentuk oleh garis singgung dan jari-jari lingkaran pada titik singgung B besarnya ________________ .

   Bagaimana dengan garis singgung yang menyinggung di titik berbeda? Jika ada titik singgung lain, berapa besar sudut antara garis singgung dan jari-jari di titik singgung itu?

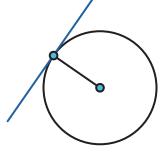
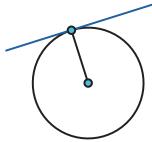
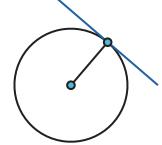
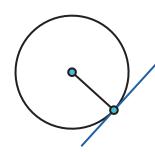
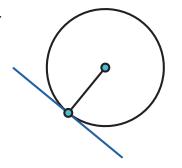
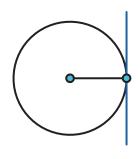
   Kalian dapat menjawab pertanyaan ini dengan cara:

Ayo Berteknologi

Jika tersedia, disarankan menggunakan aplikasi semacam *GeoGebra* atau Desmos.
https://www.geogebra.org/m/cjdyK8UR#material/u6Ev7bHg

Ayo Bekerja Sama

Kalian dapat mengerjakannya secara berkelompok. Setiap peserta didik menyelidiki gambar yang berbeda. Setelah itu diskusikan hasilnya.

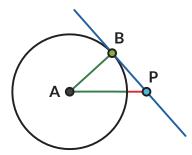
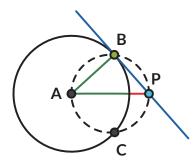
a.

b.

c.

d.

e.

f.

Pada setiap titik singgung, sudut yang dibentuk oleh garis singgung dan jari-jari lingkaran di titik singgung itu besarnya ________________.

2. Pada sebuah titik pada lingkaran, gambarkan garis yang tidak membentuk sudut siku-siku dengan jari-jari lingkaran.

   a. Garis tersebut memotong lingkaran di berapa titik?

   b. Apakah garis tersebut merupakan garis singgung?

   Garis sekan adalah garis yang memotong lingkaran pada **dua** titik.

3. Rani dan Nyoman mempelajari lebih lanjut tentang garis singgung lingkaran. Mereka menggambar garis singgung dari titik P ke lingkaran A.

Rani ingat teorema Thales, sehingga ia menduga ada sebuah lingkaran yang dapat digambarkan yang melalui titik A, B, dan P.

Tariklah ruas garis dari titik P ke setiap titik potong kedua lingkaran. Tentukan:

a. Garis PB merupakan garis singgung/garis sekan (pilih salah satu).

b. Garis PC merupakan garis singgung/garis sekan (pilih salah satu).

4. Tentukan besar sudutnya.

a. $\angle ABP =$ ______________

b. $\angle ACP =$ ______________

c. Jelaskan alasannya.

5. Tunjukkan bahwa $\triangle ABP$ kongruen dengan $\triangle ACP$.

Akibatnya:

a. Panjang $\overline{PB}$ ___________ panjang $\overline{PC}$.

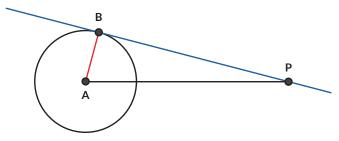
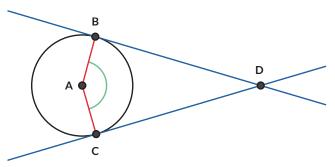
b. $\angle APB$ dan $\angle APC$ besarnya __________

Dari sebuah titik di luar lingkaran dapat dibuat sebanyak _______ buah garis singgung yang panjangnya _____________.

Yang dimaksud panjang garis singgung adalah panjang ruas garis PB atau ruas garis PC.

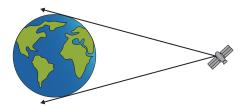
6. Jika navigator tersebut mengetahui jari-jari bumi, dan ketinggiannya dari permukaan air (berdasarkan ukuran kapal), bagaimana cara dia menentukan jarak kapal dengan pelabuhan yang tampak di cakrawala?

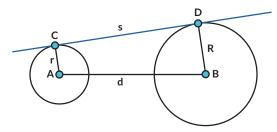
Latihan 2.2

1. Jika jari-jari lingkaran A adalah 7 cm dan titik P berjarak 25 cm dari titik A, berapakah panjang garis singgung $\overline{PB}$?

2. Pada gambar berikut, $\overline{BD}$ dan $\overline{CD}$ adalah garis singgung lingkaran A. Jika $\angle BAC = 147°$, tentukan besar $\angle BDC$.

3. **Ayo Berpikir Kreatif**

Bram, seorang navigator kapal laut, tahu bahwa jari-jari lingkaran bumi panjangnya 6.371 km. Ruang kemudi kapal berada pada ketinggian 40 m dari permukaan laut. Tentukan jarak cakrawala yang dapat Bram lihat.

4.

Satelit komunikasi mengorbit bumi pada posisi yang tetap terhadap bumi (artinya jika dilihat dari bumi, satelit tersebut akan berada pada ketinggian dan bujur yang sama, meskipun bumi berputar dan mengelilingi matahari). Satelit Telkom-4 (Merah Putih) mengorbit bumi pada garis bujur $108°$ BT. Jika jari-jari bumi adalah 6.371 km dan satelit Telkom-4 terletak pada ketinggian 35.786 km dari permukaan bumi, apakah Satelit Telkom-4 dapat memancarkan sinyal ke seluruh wilayah Indonesia?

5. Garis singgung persekutuan luar

Garis singgung persekutuan adalah garis singgung yang merupakan garis singgung bagi dua lingkaran. $\overline{CD}$ merupakan garis singgung persekutuan luar untuk lingkaran A dan lingkaran B.

a. Lingkaran A dan lingkaran B memiliki dua buah garis singgung persekutuan luar. Gambarkan garis singgung persekutuan luar yang lain.

b. Tentukan panjang garis singgung persekutuan luar $\overline{CD}$ (s) jika jarak kedua pusat lingkaran (d) dan jari-jari masing-masing lingkaran diketahui (r dan R).

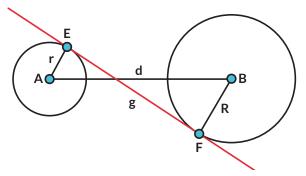
Gambarkan garis bantu sehingga kalian dapat memanfaatkan Teorema Pythagoras.

6. Rantai sepeda berfungsi untuk memindahkan daya penggerak dari pedal ke roda.

   a. Tunjukkan garis singgung persekutuan luar pada gambar rantai sepeda tersebut.

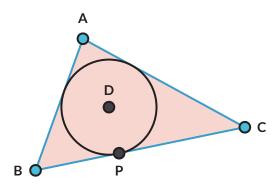
   b. Tentukan panjang garis singgung persekutuan luarnya jika jari-jari lingkaran yang lebih besar = 5 cm, jari-jari lingkaran yang lebih kecil = 3 cm, dan jarak antar kedua pusat lingkaran = 44 cm.

7. **Garis singgung persekutuan dalam**

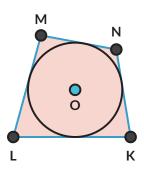
   Selain garis singgung persekutuan luar, ada juga garis singgung persekutuan dalam. $\overline{EF}$ merupakan garis singgung persekutuan dalam untuk lingkaran A dan lingkaran B.

   a. Lingkaran A dan lingkaran B memiliki dua buah garis singgung persekutuan dalam. Gambarkan garis singgung persekutuan dalam yang lain.

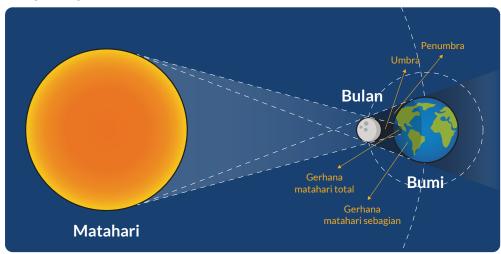
   b. Tentukan panjang garis singgung persekutuan dalam $\overline{EF}$ (g) jika jarak kedua pusat lingkaran (d) dan jari-jari masing-masing lingkaran diketahui (r dan R).

Gambarkan garis bantu sehingga kalian dapat memanfaatkan Teorema Pythagoras.

8. Dua buah lingkaran, pusatnya berjarak 5 cm. Jika kedua lingkaran tersebut masing-masing berjari-jari 1 cm dan 2 cm,
   a. Gambarkan kedua lingkaran dengan ukuran sebenarnya, juga semua garis singgung persekutuan kedua lingkaran.
   b. Tentukan panjang masing-masing garis singgung persekutuan.
   c. Manakah yang lebih panjang: garis singgung persekutuan dalam atau garis singgung persekutuan luar?
9. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, dan $\overline{AC}$ adalah garis-garis singgung pada lingkaran D.
   a. Lingkaran D adalah lingkaran _______________ $\triangle ABC$.
   b. Buktikan: $AB + PC = AC + PB$

10.

$\overline{KL}$, $\overline{LM}$, $\overline{MN}$, dan $\overline{NK}$ adalah garis-garis singgung pada lingkaran O. Segiempat $KLMN$ disebut segiempat garis singgung.

Buktikan: $LK + MN = LM + NK$

Latihan 2.2 nomor 9 dan 10 disebut **Teorema Pitot**.

Garis singgung dapat digunakan untuk menentukan bagian bumi yang akan mengalami gerhana matahari.

Gambar 2.6 Gerhana Matahari
Sumber: sciencedirect.com (2020)

Rangkuman

1. Garis singgung berpotongan dengan lingkaran di satu titik.
2. Titik potong lingkaran dengan garis singgung disebut titik singgung.
3. Garis singgung dan jari-jari lingkaran di titik singgung berpotongan tegak lurus.
4. Dari satu titik di luar lingkaran, dapat dibentuk dua garis singgung yang sama panjang.

Ayo Berefleksi

1. Apakah saya dapat menggambar garis singgung?
2. Apakah saya dapat menentukan panjang garis singgung?
3. Apakah saya paham sifat-sifat garis singgung?

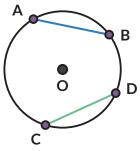
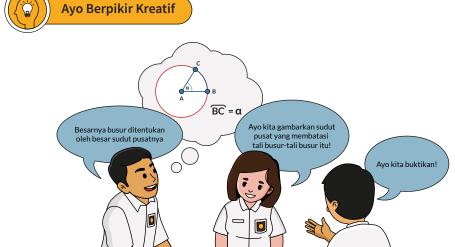
C. Lingkaran dan Tali Busur

Gambar 2.7 Busur Panah

Busur panah merupakan bagian dari lingkaran dan talinya menghubungkan dua titik pada lingkaran. Dalam matematika, ruas garis yang menghubungkan dua titik pada lingkaran disebut **tali busur**.

Eksplorasi 2.3

1. Tali busur $\overline{AB}$ sama panjang dengan tali busur $\overline{CD}$. Ingat bahwa busur AB dituliskan $\overset{\frown}{AB}$. Besarnya $\overset{\frown}{AB}$ ditentukan oleh besarnya $\angle AOB = \alpha$ (Titik O adalah pusat lingkaran).
   Apakah besarnya $\overset{\frown}{AB}$ dan $\overset{\frown}{CD}$ sama?

Ayo Berpikir Kreatif

2. Jika AB dan CD adalah dua tali busur yang sama panjang, gambarkan $\triangle OAB$ dan $\triangle OCD$. Apakah $\triangle OAB$ dan $\triangle OCD$ kongruen? Bagaimana kalian tahu?
3. Berdasarkan no. 2, bagaimana besar $\angle AOB$ dan $\angle COD$?
4. Gunakan no. 3 untuk membuktikan temuanmu pada no. 1.

Eksplorasi 2.4

Suatu hari seorang siswi SMA kelas XI, Sondang, dengan gembira mengatakan kepada Nyoman dan Rani bahwa dia menemukan suatu teorema baru ketika sedang bereksplorasi dengan lingkaran. Sondang menemukan jika dia mengambil segitiga siku-siku (sudut siku-sikunya menghadap pada diameter lingkaran) dan mencerminkan segitiga ini pada diameter lingkaran, maka segiempat yang dihasilkan memiliki sifat yang menarik, yaitu jumlah sudut yang berhadapan selalu sama dengan $180°$.

1. Apakah penemuan Sondang itu benar atau hanya kebetulan berlaku untuk kasus itu saja?
2. Bagaimana kalau diagonal segiempat tidak harus merupakan diameter lingkaran? Apakah sifat itu masih berlaku?

Coba kalian bereksplorasi dan membuat kesimpulan dari hasil eksplorasi kalian!

1. Gambarkan sebuah lingkaran dan segitiga siku-siku yang sisi miringnya adalah diameter lingkaran. Cerminkan segitiga siku-siku itu pada diameter lingkaran. Perhatikan segiempat yang terbentuk. Apakah keempat titik sudutnya terletak pada lingkaran? Jelaskan.
2. Untuk masing-masing titik sudut, tentukan sudut tersebut menghadap ke busur yang mana.
   a. ______________________
   b. ______________________
   c. ______________________
   d. ______________________

3. Jumlahkan sudut-sudut yang berhadapan.

   a. ______________________

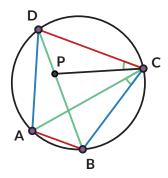
   b. ______________________

4. Bagaimana jika segiempat itu **bukan** merupakan penggabungan segitiga siku-siku dan pencerminannya? Apakah sifat yang sama masih berlaku?

   a. Ulangi langkah 2 dan 3 jika keempat titik sudutnya terletak pada lingkaran.

   b. Ulangi langkah 2 dan 3 jika salah satu titik sudutnya **tidak** terletak pada lingkaran.

   Segiempat yang keempat sisinya merupakan tali busur sebuah lingkaran disebut segiempat tali busur. Pada segiempat tali busur, sudut-sudut yang berhadapan jumlahnya _____________.

5. Kalian telah menemukan sifat sudut-sudut pada segiempat tali busur. Adakah sifat segiempat tali busur yang terkait panjang ruas garisnya? Perhatikan segiempat tali busur $ABCD$ berikut.

   a. Gambarkan titik P pada $\overline{BD}$ sehingga $\angle ACB = \angle DCP$. Buktikan bahwa $\triangle CDP \sim \triangle CAB$

   b. Tunjukkan bahwa $DP \cdot AC = AB \cdot CD$.

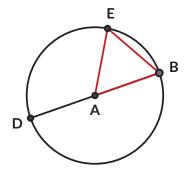
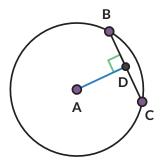
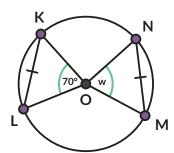
   c. Tunjukkan bahwa $\triangle ACD \sim \triangle BCP$.

   d. Tunjukkan bahwa $BP \cdot AC = BC \cdot DA$

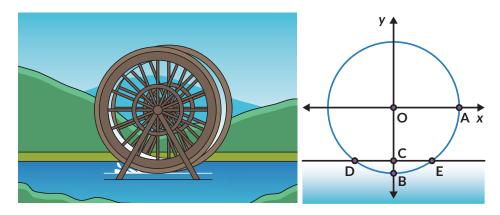
   e. Berdasarkan poin b dan d, apa yang dapat kalian simpulkan tentang $AC \cdot BD$?

   Hasil yang kalian dapatkan ini dikenal sebagai **Teorema Ptolemeus**.

Latihan 2.3

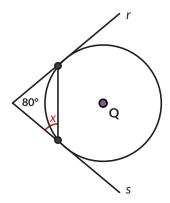
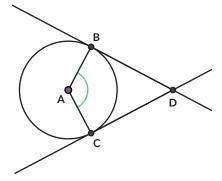
1. Lingkaran yang berpusat di titik O dan jari-jarinya 5 cm. Berapa panjang tali busurnya yang paling panjang?
2. Jika $AD = 3$ cm dan $BE = AD$, tentukan:
   a. besar $\angle BAE$
   b. besar $\angle BDE$

3. **Apotema**
   Apotema adalah ruas garis dari pusat lingkaran dan tegak lurus tali busur.
   Buktikan bahwa $BD = DC$.

4. Tentukan nilai w sehingga $\overline{KL}$ dan $\overline{MN}$ sama panjang.

5. **Ayo Berpikir Kritis**

Situs Gunung Padang adalah situs prasejarah megalitik besar yang terletak di Kabupaten Cianjur. Salah satu artefak yang ditemukan di sana diduga merupakan pecahan guci.
Diskusikan dengan temanmu bagaimana cara menentukan diameter mulut guci tersebut.

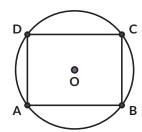
6. Kincir air berikut digunakan untuk pembangkit energi dan irigasi. Pada diagram sebelah kanan, roda dengan diameter 10 m diletakkan pada sungai sehingga titik terendah roda terletak pada kedalaman 1 m.

a. Tentukan ketinggian titik A dari permukaan air.

b. Permukaan air ditunjukkan oleh tali busur $\overline{DE}$. Tentukan besar $\angle DAE$.

c. Tentukan jarak dua titik pada roda yang terletak di permukaan air.

7. Sinar garis r dan s adalah garis singgung pada lingkaran Q. Jika sudut antara r dan s adalah $80°$, tentukan besarnya sudut x.

8. $\overline{BD}$ dan $\overline{CD}$ adalah garis singgung pada lingkaran A.

a. Apakah segiempat $ABCD$ merupakan segiempat tali busur? Buktikan.

b. Jika segiempat $ABCD$ merupakan segiempat tali busur, di manakah pusat lingkaran luar segiempat $ABCD$?

9. Segiempat $ABCD$ adalah persegi panjang yang semua titik sudutnya terletak pada lingkaran.

a. Apakah $ABCD$ merupakan segiempat tali busur? Buktikan.

b. Jika kalian menerapkan Teorema Ptolemeus pada segiempat $ABCD$, apakah yang kalian dapatkan?

c. Apakah nama teorema tersebut?

10. **Ayo Berpikir Kreatif**

Goras ingin menyajikan pizza yang dibelinya di atas piring. Sayangnya, piring yang tersedia diameternya lebih kecil daripada diameter pizza. Ia memotong pizzanya dengan cara tertentu, mengambil sebagian, lalu menyusun sisa pizza sehingga terlihat sebagai pizza utuh.

a. Ambillah selembar kertas berbentuk lingkaran. Cobalah melakukan hal yang dikerjakan Goras.

b. Apakah pizza kedua sama dengan pizza awal? Jelaskan.

Rangkuman

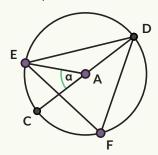
Pada segiempat tali busur berlaku:

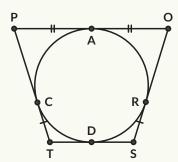
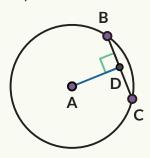
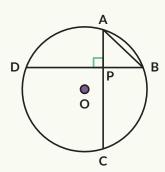
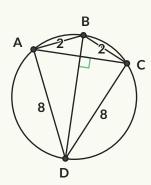
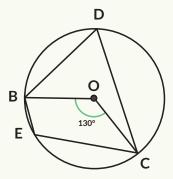
1. Sudut-sudut yang berhadapan saling berpelurus.
2. Hasil kali diagonal sama besarnya dengan jumlah dari hasil kali sisi yang berhadapan.

Refleksi

1. Apakah saya dapat menerapkan teorema-teorema tentang lingkaran?
2. Apakah saya dapat membuktikan teorema-teorema terkait lingkaran?
3. Apakah saya mengerti sifat-sifat garis singgung?
4. Apakah saya mengerti sifat-sifat segiempat tali busur?

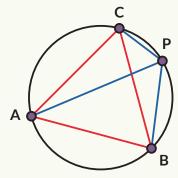
Uji Kompetensi

1. Jika $\alpha = 48°$, tentukan besarnya

a. $\angle CDE$
b. $\angle DEA$
c. $\angle DAE$
d. $\angle DFE$

2. Segiempat $POST$ keempat sisinya menyinggung lingkaran. Jika panjang $\overline{TS}$ = 12 cm dan panjang $\overline{PC}$ = 14 cm, tentukan keliling $POST$.

3. Pada lingkaran A yang berjari-jari 5 cm terdapat tali busur $\overline{BC}$ sepanjang 8 cm. Tentukan panjang apotemanya.

4. Dua tali busur, $\overline{AC}$ dan $\overline{BD}$ pada lingkaran dengan pusat O, berpotongan tegak lurus pada titik P. Panjang AB sama dengan jari-jari lingkaran.
   a. Berapa besar $\overset{\frown}{AB}$?
   b. Apa nilai perbandingan $\frac{DC}{AB}$? Jelaskan bagaimana kamu mendapatkan jawabannya.

5. Berapa panjang dari tali busur AC?
   a. $\frac{16\sqrt{17}}{17}$
   b. $\sqrt{68}$
   c. $\sqrt{32}$
   d. $\frac{\sqrt{32}}{68}$

6. Segiempat $BDCE$ adalah segiempat tali busur, O adalah titik pusat lingkaran, dan besar $\angle BOC = 130°$. Tentukan besar $\angle BEC$.

Pengayaan

Gambar 2.8 menunjukkan segitiga sama sisi. Titik P terletak pada lingkaran luar segitiga ABC. Titik P dihubungkan dengan setiap titik sudut segitiga ABC.

Jika AP lebih panjang daripada BP dan CP, buktikan bahwa:

$$AP = BP + CP$$

Gambar 2.8 Segitiga Sama Sisi ABC

Sifat ini pertama kali ditemukan oleh matematikawan Belanda bernama Frans van Schooten, karena itu disebut sebagai **Teorema van Schooten**.

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2021

Matematika untuk SMA/SMK Kelas XI

Penulis: Dicky Susanto, dkk.

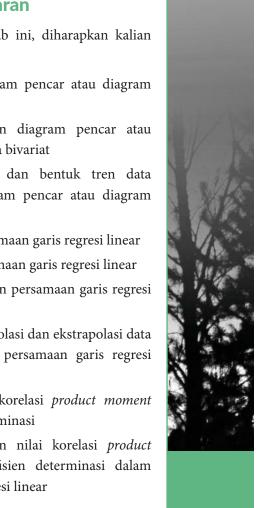
ISBN: 978-602-244-789-5 (jil.2)

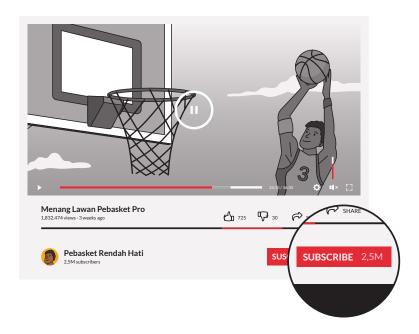
Bab 3

Statistika

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan kalian dapat

1. Menggambar diagram pencar atau diagram scatter data bivariat
2. Menginterpretasikan diagram pencar atau diagram *scatter* data bivariat
3. Menentukan arah dan bentuk tren data bivariat dari diagram pencar atau diagram scatter
4. Menggambar persamaan garis regresi linear
5. Menentukan persamaan garis regresi linear
6. Menginterpretasikan persamaan garis regresi linear
7. Menerapkan interpolasi dan ekstrapolasi data berdasarkan suatu persamaan garis regresi linear
8. Menghitung nilai korelasi *product moment* dan koefisien determinasi
9. Menginterpretasikan nilai korelasi *product moment* dan koefisien determinasi dalam proses analisis regresi linear

Gambar 3.1 Pemadaman Kebakaran Hutan di Pekanbaru
Sumber: liputan6.com (2019)

Kebakaran hutan merupakan hal yang cukup sering terjadi di Indonesia. Ketika kebakaran hutan terjadi, apakah dampaknya bagi kita semua? Tentu saja kebakaran hutan ini akan meningkatkan polusi udara. Namun, dari berbagai dampak yang ada, mungkin akan ada orang yang berpendapat bahwa kebakaran hutan dapat mengakibatkan penghasilan warga setempat menurun, peningkatan jumlah orang-orang yang mengalami infeksi saluran pernapasan akut atau berhubungan dengan pemanasan global dan perubahan iklim. Bagaimana kita dapat memastikan bahwa hal tersebut benar atau tidak?

Gambar 3.2 Ilustrasi Banyak *Subscribers* di YouTube

Pada zaman sekarang, media sosial merupakan konsumsi masyarakat umum dalam kehidupan sehari-hari, salah satunya adalah YouTube. Setiap YouTuber pasti selalu menginginkan *subscribers* yang banyak sehingga menjadi pemacu untuk membuat konten yang menarik. Namun, tahukah kalian bagaimana caranya dan apa saja usaha yang mereka lakukan untuk mencapai hal tersebut? Salah satu usaha yang mereka lakukan adalah menyediakan waktu yang didedikasikan untuk berbagai

persiapan pembuatan konten, video, dan lain sebagainya. Hal yang dipertanyakan adalah apakah ada hubungan antara waktu yang didedikasikan oleh para YouTuber dan banyak *subscribers*? Apakah banyaknya *subscribers* bergantung pada waktu yang didedikasikan? Jika ya, berapa peningkatan *subscribers* ketika waktu yang didedikasikan ditambah 1 jam per hari?

Adakah hal-hal lain yang selama ini terpikirkan oleh kalian bahwa dua hal saling mempunyai hubungan seperti contoh di atas? Misalnya, waktu yang digunakan untuk belajar dan tingkat kompetensi yang tercapai, hubungan antara berat badan dan tinggi badan yang ideal, dan lain-lain. Ketika menghadapi permasalahan seperti itu, apakah kesimpulan yang kalian ambil hanya melalui logika atau pengalaman semata, atau melalui pengolahan data yang tepat?

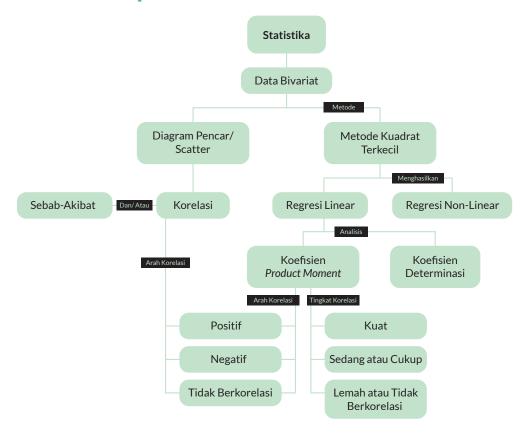
Untuk menjawab pertanyaan di atas, kalian perlu mempelajari jenis data yang menyajikan dua variabel kuantitatif dan proses analisis yang akan membantu kalian untuk mengambil kesimpulan yang tepat dari contoh-contoh permasalahan di atas dan juga mempersiapkan kalian untuk menyelesaikan permasalahan baru yang akan kalian temukan dalam kehidupan sehari-hari.

Pertanyaan Pemantik

- Bagaimana kita dapat menganalisis hubungan antara dua variabel kuantitatif?
- Apa peran ukuran pemusatan data dan ukuran penyebaran data dalam proses analisis hubungan antara dua variabel kuantitatif?
- Apakah ada suatu standar supaya kita dapat menyimpulkan dengan tepat bahwa dua variabel kuantitatif mempunyai hubungan atau tidak?
- Apakah semua kumpulan data dapat dimodelkan dengan garis lurus?
- Bagaimana pola suatu kumpulan data yang dapat dimodelkan dengan garis lurus?
- Bagaimana kita bisa tahu bahwa model garis lurus yang kita buat sudah tepat?

Kata Kunci

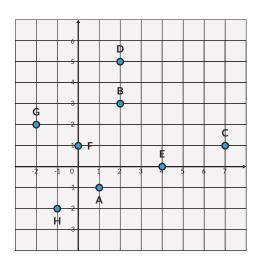
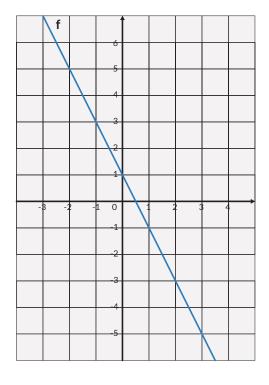
Data Bivariat, Diagram Pencar/*Scatter*, Tren, Regresi Linear, Garis Best-fit, Regresi Non-linear, Metode Kuadrat Terkecil, Residu, Interpolasi, Ekstrapolasi, Korelasi, Sebab-Akibat, Koefisien Korelasi, Korelasi *Product Moment*, Koefisien Determinasi

Peta Konsep

1. Tuliskan pasangan titik-titik koordinat yang terletak pada bidang kartesian di samping.

   A (… , …)   E (… , …)

   B (… , …)   F (… , …)

   C (… , …)   G (… , …)

   D (… , …)   H (… , …)

2. Tentukan nilai-nilai berikut ini berdasarkan garis lurus pada diagram disamping.
   a. Nilai y pada saat nilai x = 0
   b. Nilai y pada saat nilai x = 2
   c. Nilai x pada saat nilai y = 5
   d. Nilai x pada saat nilai y = -1

3. Rangga ingin berlangganan internet dari penyedia jasa internet Lancar Jaya untuk pembelajaran jarak jauh. Biaya pemasangan layanan internet adalah Rp500.000,00 yang hanya dibayarkan sekali selama berlangganan dan biaya langganan bulanan yang sudah termasuk pajak adalah Rp250.000,00.
   a. Tentukan berapa biaya total yang perlu dibayarkan oleh Rangga pada bulan pertama.
   b. Tentukan berapa biaya total yang perlu dibayarkan oleh Rangga jika berlangganan hingga bulan ke-12.
   c. Rangga ingin membuat suatu persamaan matematika yang dapat membantunya menghitung biaya total dengan cepat di mana x menyatakan banyaknya bulan berlangganan dan y menyatakan biaya total langganan. Bagaimana persamaan matematika yang tepat?
   d. Tentukan berapa biaya total yang perlu dibayarkan oleh Rangga jika berlangganan hingga bulan ke-24 menggunakan persamaan yang diperoleh di bagian c.
   e. Beberapa bulan kemudian, Rangga menghitung bahwa dia sudah mengeluarkan total uang sebesar Rp2.000.000,00 untuk berlangganan internet. Sudah berapa bulan lamanya Rangga berlangganan internet?

4. Terdapat sebuah ember yang bocor dan volume air di dalamnya dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan garis lurus $y = 1 - 0.02x$ di mana x menyatakan waktu (menit) dan y menyatakan volume air (liter) yang tersisa dalam ember.
   a. Jelaskan makna dari 1 dari persamaan $y = 1 - 0.02x$
   b. Jelaskan makna dari $-0.02x$ dari persamaan $y = 1 - 0.02x$
   c. Berapa liter volume air di dalam ember setelah 5 menit?
   d. Berapa lama volume air di dalam ember tersebut akan habis?
5. Hitunglah rata-rata dan varians dari data-data berikut.

   8 7 10 12 9 4 6

A. Diagram Pencar atau Diagram Scatter

Ayo kita gunakan konteks mengenai hubungan antara rata-rata waktu yang didedikasikan oleh YouTuber dan banyak *subscribers* yang mereka miliki.

Dalam suatu penelitian sederhana, terpilih sampel tujuh YouTuber dan diperoleh informasi mengenai rata-rata waktu yang didedikasikan per hari dan banyak *subscribers* mereka pada saat itu (dibulatkan ke ratusan ribu). Informasi yang diperoleh adalah sebagai berikut.

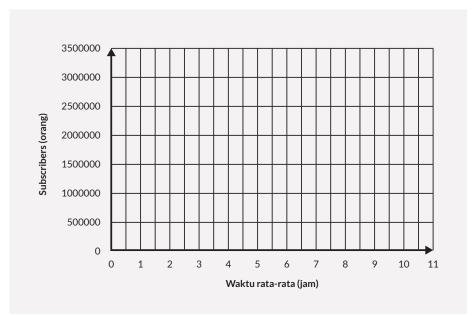
Tabel 3.1 Data Rata-rata Waktu dan Banyak *Subscribers*

Rata-rata waktu per hari	Banyak *subscribers*
5,5 jam	1.400.000 orang
8,3 jam	2.400.000 orang
3,8 jam	1.300.000 orang
6,1 jam	1.600.000 orang
3,3 jam	900.000 orang
4,9 jam	1.500.000 orang
6,7 jam	1.700.000 orang

Peneliti ingin mengetahui apakah ada hubungan antara rata-rata waktu yang didedikasikan per hari dan banyak *subscribers* dari data yang diperoleh di atas. Apa saja yang harus dilakukan oleh peneliti dalam mengolah data yang telah diperoleh?

Apakah ilmu statistika yang telah kalian pelajari sejauh ini cukup untuk memperoleh tujuan analisis dari peneliti tersebut? Coba diskusikan dengan teman-teman kalian.

Eksplorasi 3.1

1. Kita akan menyajikan data dari Tabel 3.1 ke dalam bentuk diagram pencar atau diagram scatter. Ayo letakkan pasangan-pasangan data rata-rata waktu dan banyak *subscribers* dalam bentuk pasangan titik koordinat (rata-rata waktu, banyak *subscribers*) dalam diagram di bawah ini.

2. Bagaimana pola penyebaran titik-titik yang telah digambar pada diagram di atas?
3. Kesimpulan seperti apa yang dapat kalian ambil mengenai hubungan antara rata-rata waktu yang didedikasikan dan banyak *subscribers* berdasarkan pola penyebaran titik-titik pada nomor 2?
4. Data mana yang tidak konsisten dengan kesimpulan kalian pada nomor 3?
5. Apakah data tersebut akan membuat kesimpulan kalian pada nomor 3 menjadi tidak tepat?

Pada Eksplorasi 3.1, kalian telah menggunakan **diagram pencar** atau diagram scatter. **Diagram pencar** atau **diagram scatter** digunakan saat kalian perlu menyajikan data yang terdiri atas dua variabel kuantitatif atau sering juga disebut sebagai **data bivariat**.

Pada contoh permasalahan di atas, rata-rata waktu disebut sebagai variabel independen. **Variabel independen** adalah variabel yang akan digunakan untuk membuat prediksi terhadap nilai variabel dependen. Variabel independen digambarkan pada bagian sumbu X di diagram pencar, sedangkan banyak *subscribers* disebut sebagai variabel dependen. **Variabel dependen** adalah variabel yang nilainya dipengaruhi oleh variabel independen. Variabel dependen digambarkan pada sumbu Y di diagram pencar.

Ayo Berkomunikasi

Coba kalian pikirkan apa yang akan terjadi jika variabel X dan Y pada contoh permasalahan di atas tertukar? Diskusikan dengan teman-teman kalian.

Gambar 3.3 Contoh Kesimpulan yang Salah Akibat Variabel X dan Y yang Tertukar
Sumber: https://xkcd.com

Hal lain yang perlu dibedakan adalah konsep **korelasi** dan **sebab-akibat**. Dua variabel dikatakan mempunyai hubungan sebab-akibat jika perubahan pada salah satu variabel mengakibatkan perubahan pada variabel lainnya. Hanya karena dua variabel memiliki korelasi, tidak berarti selalu ada hubungan sebab-akibat pada keduanya, karena korelasi hanya melihat pada polanya. Mari kita lihat kembali permasalahan mengenai rata-rata waktu dan banyak *subscribers*. Hasil Eksplorasi 3.1 menyatakan bahwa ada korelasi antara kedua variabel tersebut, namun bukan berarti dapat ditarik kesimpulan bahwa ada hubungan sebab-akibat. Masih banyak variabel

lain yang perlu dipertimbangkan untuk menarik kesimpulan sebab-akibat, misalnya sudah berapa lama menjadi YouTuber, tingkat efektivitas kerja, dan lainnya. Hal ini memerlukan studi yang lebih mendalam dan kompleks.

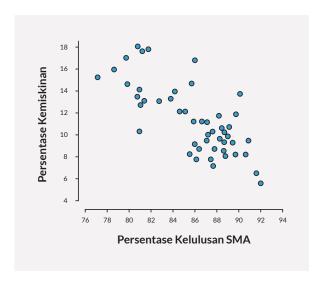
Penguatan Karakter

Jadi, berhati-hatilah dalam setiap kali mengambil kesimpulan karena kesimpulan yang tidak tepat dapat mengakibatkan efek negatif bagi berbagai cabang ilmu pengetahuan, kehidupan sosial, dan bernegara.

Ayo Berpikir Kreatif

1. Menurut kalian, hal-hal negatif apa saja yang mungkin akan terjadi jika terdapat kesimpulan-kesimpulan yang salah baik di dalam cabang ilmu pengetahuan, kehidupan sosial, dan bernegara?
2. Menurut kalian, apa yang harus kalian lakukan untuk menghindari pengambilan kesimpulan yang salah?
3. Menurut kalian, apa yang dapat kalian lakukan untuk menjaga diri sendiri, kehidupan akademik, sosial dan bernegara dari berbagai informasi dengan dasar kesimpulan yang salah?

Latihan 3.1

1. Perhatikan pasangan-pasangan variabel di bawah ini. Tentukan bagaimana hubungan mereka dan berikan alasan kalian.
   a. Banyak kendaraan bermotor dan tingkat polusi udara.
   b. Jarak yang ditempuh oleh sebuah motor dan volume bensin dalam tangki bensin.
   c. Biaya listrik dan biaya air per bulan.
2. Rizki ingin mengetahui hubungan tingkat kelulusan SMA dan tingkat kemiskinan. Data yang diperoleh oleh Rizki disajikan dalam bentuk diagram pencar berikut.

a. Bagaimana pola penyebaran titik-titik yang telah digambar pada diagram di atas?

b. Kesimpulan seperti apa yang dapat kalian ambil mengenai hubungan persentase kelulusan SMA dan persentase kemiskinan?

3. Tabel berikut ini memberikan informasi mengenai kandungan gula (gram) dan jumlah kalori dalam satu sajian dari 13 sampel merek sereal.

Gula (gram)	4	15	12	11	8	6	14	2	7	14	20	3	13
Kalori	120	200	140	110	120	80	170	100	130	190	190	110	120

a. Gambarkan diagram pencar atau diagram scatter dari data di atas.

b. Bagaimana pola penyebaran titik-titik yang telah digambar pada diagram di atas?

c. Kesimpulan seperti apa yang dapat kalian ambil mengenai hubungan antara gula (gram) dan jumlah kalori?

4.

Suatu hari saat pelajaran Statistika, guru menyajikan data mengenai hubungan antara dua variabel dari tinggi badan anak usia dini umur 2 hingga 7 tahun dalam bentuk tabel berikut ini.

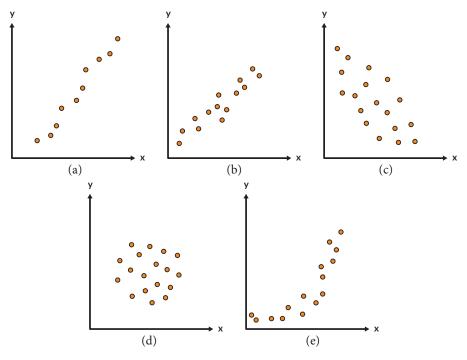
Umur	Tinggi Rata-rata (cm)
2	91
3	99
4	104
5	112
6	119
7	126

Salah satu siswa, Kefas, menyimpulkan bahwa semakin bertambahnya umur, semakin bertambah juga tinggi badan. Namun, tidak tepat jika disimpulkan bahwa umur menyebabkan tinggi badan meskipun memang ada yang mendasari hubungan sebab-akibat antara keduanya.

a. Menurut kalian, apa yang menjadi dasar sebab-akibat antara umur dan tinggi badan berdasarkan konteks data di atas?
b. Apakah kesimpulan Kefas berlaku untuk sepanjang umur manusia hidup? Jelaskan alasan kalian.
c. Jika kalian diminta untuk mengambil kesimpulan secara umum mengenai hubungan umur dan tinggi badan, apa yang perlu kalian lakukan?

Eksplorasi 3.2

Di dalam sebuah kesimpulan hasil analisis, apakah cukup hanya dengan mengatakan bahwa dua variabel memiliki korelasi? Ternyata ada jenis-jenis korelasi berdasarkan arah dan bentuk tren datanya untuk membedakan satu dengan yang lainnya. Dalam permasalahan rata-rata waktu dan banyak *subscribers*, diperoleh bahwa mereka mempunyai **korelasi positif** yang artinya adalah semakin meningkat rata-rata waktu maka semakin meningkat juga banyak *subscribers*, dan bentuk tren data mereka adalah **linear** karena pola tren data yang menyerupai garis lurus. Kita akan mempelajari lebih banyak lagi melalui eksplorasi berikut ini.

Perhatikan diagram berbagai jenis korelasi berikut ini.

Gambar 3.4 Diagram Pencar dan Jenis Korelasi

1. Ayo pasangkan (a), (b), (c), (d), dan (e) dengan pilihan kategori A, B, C, D atau E yang tepat sesuai deskripsi pada tabel di bawah ini. Pilihan kategori boleh untuk lebih dari satu diagram. Diskusikan dengan teman-teman kalian.

	Jenis korelasi berdasarkan arah tren data	Bentuk tren data	Interpretasi data
A	Korelasi positif	Linear	Semakin meningkat nilai variabel x, semakin meningkat nilai variabel y
B	Korelasi negatif	Linear	Semakin meningkat nilai variabel x, semakin menurun nilai variabel y
C	Tidak berkorelasi	Tidak berbentuk	Nilai variabel x tidak memengaruhi nilai variabel y

	Jenis korelasi berdasarkan arah tren data	Bentuk tren data	Interpretasi data
D	Korelasi positif	Kurva/Non-linear	Semakin meningkat nilai variabel x, semakin meningkat nilai variabel y
E	Korelasi negatif	Kurva/Non-linear	Semakin meningkat nilai variabel x, semakin menurun nilai variabel y

2. Jika ada kategori yang tidak dapat dipasangkan dengan diagram-diagram di atas, gambarlah sketsa diagram pencar yang menggambarkan kategori tersebut.

Berdasarkan hasil Eksplorasi 3.2, kalian telah mempelajari jenis korelasi berdasarkan arah tren data (**korelasi positif**, **korelasi negatif**, dan **tidak berkorelasi**), bentuk tren data (**linear** dan **kurva/non-linear**) serta interpretasi masing-masing datanya. Kalian akan mempelajari lebih jauh lagi mengenai hal ini pada subbab berikutnya tentang bagaimana proses analisis korelasi untuk tren data berbentuk linear. Pada jenjang ini, kalian tidak akan mempelajari mengenai proses analisis korelasi untuk tren data berbentuk kurva/non-linear.

Ayo Berpikir Kreatif

Gambarlah suatu diagram pencar yang memiliki bentuk tren data kurva/non-linear namun arah tren data tidak menunjukkan korelasi positif maupun negatif. Berikan interpretasi data dari diagram pencar yang telah kalian gambar.

Ayo latihan untuk memantapkan keterampilan dalam membaca diagram pencar dan interpretasi datanya.

Latihan 3.2

Pada masing-masing diagram pencar di bawah ini, berikan keterangan (i) jenis korelasinya berdasarkan arah tren data, (ii) bentuk tren datanya dan (iii) interpretasi datanya.

a.

b.

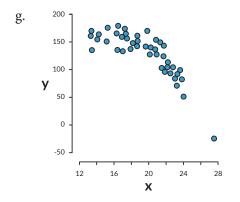
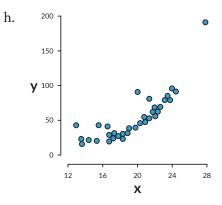
c.

d.

e.

f.

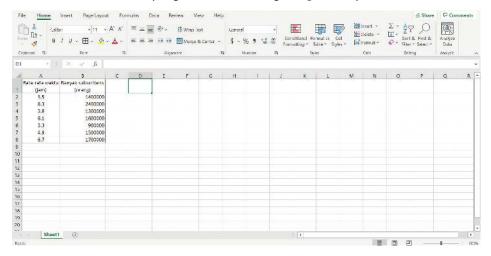
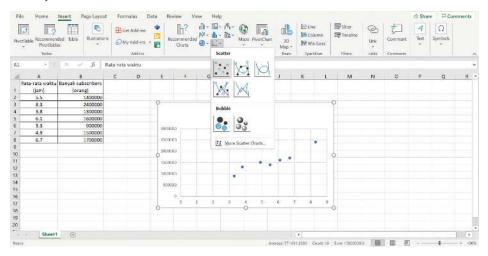
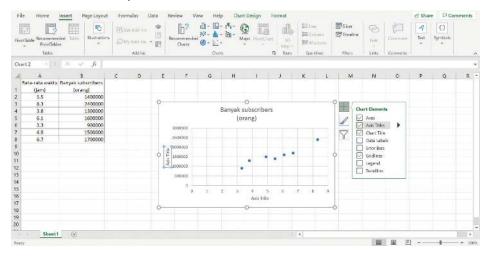
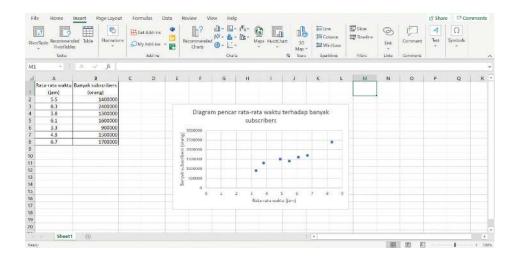
g.

h.

Ayo Berteknologi

Ayo, sekarang saatnya kita mencoba menggunakan teknologi untuk menggambar diagram pencar. Penggunaan teknologi ini akan memudahkan kalian dalam menggambar dan menganalisis data dalam jumlah yang banyak serta memberikan efisiensi dalam pengerjaannya. Aplikasi yang dapat kalian gunakan cukup banyak seperti *Microsoft Excel*, *GeoGebra*, SPSS, dan lainnya. Buku ini akan memberikan panduan penggunaan *Microsoft Excel* dan untuk aplikasi lainnya dapat kalian eksplorasi secara mandiri melalui berbagai informasi dari buku lain, dan sumber yang tepat dan baik dari internet.

Tahapan menggambar diagram pencar menggunakan *Microsoft Excel*:

1. Buka aplikasi *Microsoft Excel* dan buat lembar kerja baru.
2. Masukkan data bivariat yang akan dibuat diagram pencarnya.

Rata-rata waktu (jam)	Banyak subscribers (orang)
5.5	1400000
8.3	2400000
3.8	1300000
6.1	1600000
3.3	900000
4.9	1500000
6.7	1700000

3. Pilihlah semua datanya, kemudian pilih menu **Insert** dan pilih **Scatter Plot** yang posisinya ditunjukkan oleh gambar di bawah (posisi kemungkinan akan berbeda tergantung dari versi *Microsoft Excel* yang digunakan) maka secara otomatis diagram pencar akan dibuat namun masih perlu penyesuaian penamaan variabel x dan y.

4. Klik diagram kemudian klik tanda "+" yang ada di kanan atas diagram dan pastikan "Axis Titles" dicentang maka akan terlihat bagian untuk penamaan untuk sumbu x dan y.

5. Ubahlah penamaan sumbu x dan y, dan judul diagram pencar dengan cara klik pada bagian masing-masing dan ketik penamaan yang baru.

Mudah, bukan? Ayo berlatih menggunakan aplikasi ini agar kalian tidak lupa tahapannya. Kalian juga dapat menggunakan aplikasi ini untuk memastikan bahwa gambar diagram pencar yang kalian buat dengan gambar tangan sudah tepat atau belum.

Mari kita merefleksikan kembali hal-hal apa saja yang telah kita pelajari.

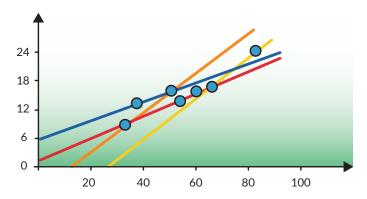
1. Apakah saya sudah dapat membuat diagram pencar?
2. Apakah saya sudah dapat menentukan arah, bentuk dan interpretasi tren data dengan membaca diagram pencar?

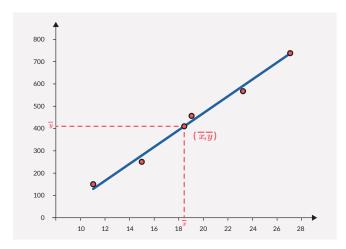
B. Regresi Linear

1. Pengertian

Ketika dua variabel kuantitatif pada suatu diagram pencar sudah menunjukkan adanya korelasi, kita dapat menggambar suatu garis yang paling tepat untuk mewakili semua data yang ada.

Ayo Berpikir Kritis

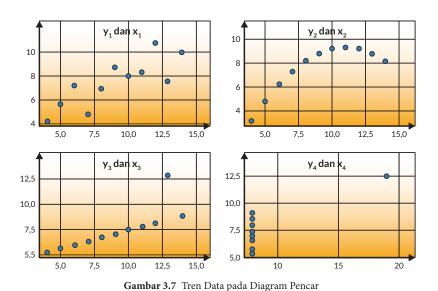
Perhatikan dan pikirkanlah garis mana yang paling tepat untuk mewakili data pada diagram pencar di bawah ini. Jika menurut kalian tidak ada garis yang tepat, buatlah garis kalian sendiri. Kemukakan alasan yang mendasari pilihan garis kalian.

Gambar 3.5 Diagram Pencar dan Berbagai Kemungkinan Garis Lurus

Di antara semua garis yang mungkin dibentuk, hanya ada satu garis yang paling tepat yang disebut sebagai garis *best-fit*. Garis ini merupakan model linear yang memperkirakan hubungan antara dua variabel kuantitatif pada diagram pencar tersebut. Model regresi yang memberikan hubungan garis lurus antara dua variabel ini disebut **regresi linear**.

Gambar 3.6 Contoh Regresi Linear

Gambar 3.6 memberikan contoh bagaimana suatu garis *best-fit* digambar di antara titik-titik pada diagram pencar. Garis ini tidak harus melalui titik-titik tersebut karena hanya bersifat estimasi. Namun, bisa saja garis melewati satu titik atau lebih pada saat penggambaran. Tapi satu hal yang pasti adalah garis tersebut selalu melewati pasangan titik koordinat rata-rata nilai x dan y, $(\overline{x}, \overline{y})$.

Ayo Berpikir Kritis

Dapatkah kalian menggunakan model regresi linear sebagai model dari suatu data bivariat yang mempunyai bentuk tren yang tidak menunjukkan bentuk linear? Gunakan gambar diagram pencar di bawah ini untuk membantu berpikir.

Gambar 3.7 Tren Data pada Diagram Pencar

2. Metode Kuadrat Terkecil

Di dalam proses analisis regresi linear, kita mencoba untuk mencari garis lurus yang paling tepat terhadap titik-titik yang ada pada diagram pencar. Garis lurus itu akan memberikan deskripsi terbaik mengenai hubungan antara variabel independen dan dependen. Ayo lakukan Eksplorasi 3.3 sebagai dasar berpikir mengenai metode ini.

Eksplorasi 3.3

Suatu sekolah menerapkan program rajin menabung pada seluruh siswanya. Mona tertarik untuk melihat bagaimana hubungan antara uang jajan yang diperoleh teman-temannya dan besar uang yang ditabung. Dia memilih satu kelas dan dari kelas tersebut diambil sampel delapan siswa untuk memperoleh data mengenai uang jajan yang diterima dan uang yang ditabung. Data yang diperoleh adalah sebagai berikut.

Uang jajan	Uang yang ditabung
Rp10.000,00	Rp2.000,00
Rp40.000,00	Rp11.000,00
Rp25.000,00	Rp8.000,00
Rp50.000,00	Rp14.000,00
Rp15.000,00	Rp5.000,00
Rp35.000,00	Rp10.000,00
Rp30.000,00	Rp7.000,00
Rp45.000,00	Rp15.000,00

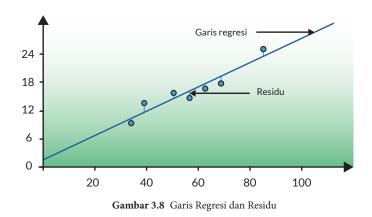
1. Gambarlah diagram pencar dari data di atas.
2. Gambarlah prediksi garis *best-fit* dari hubungan antara uang jajan dan uang yang ditabung.
3. Jelaskan alasan mengapa kalian menggambar garis lurus seperti itu.
4. Bandingkan prediksi garis *best-fit* yang telah kalian buat dengan prediksi garis *best-fit* yang digambar oleh teman-teman kalian serta bandingkan alasan kalian.
5. Tuliskan kesimpulan dari berbagai ide atau gagasan yang menurut kalian paling tepat untuk menggambar suatu garis *best-fit.*

Berdasarkan Eksplorasi 3.3, pasti banyak ide atau gagasan yang berbeda-beda mengenai cara menggambar garis lurus yang tepat. Namun pertanyaannya, apakah ada cara yang paling tepat dalam memutuskan apakah suatu garis sudah tepat atau

tidak? Ternyata ada loh, metode umum untuk menempatkan garis lurus ke data-data hasil observasi disebut sebagai **metode kuadrat terkecil**.

Metode kuadrat terkecil ditemukan oleh Carl Friedrich Gauss (1777–1855) dari Jerman, Adrien-Marie Legendre (1752–1833) dari Prancis, dan Robert Adrain (1775–1843) dari Irlandia sekitar 200 tahun yang lalu yang masing-masing bekerja secara terpisah.

Wow… nama metodenya seperti istilah operasi matematika sehari-hari yang sering kita dengarkan, ya. Sesuai dengan nama metode itu nanti kalian perlu melakukan operasi kuadrat dan tujuannya adalah untuk menemukan suatu nilai terkecil. Nilai apa yang perlu kita kecilkan hingga sekecil mungkin? Mari kita lihat gambar diagram berikut ini sebagai visualisasi sederhana dari metode ini.

Gambar 3.8 Garis Regresi dan Residu

Gambar 3.8 memberikan gambaran bahwa ada selisih antara nilai variabel dependen (y) dari data asli dengan nilai variabel dependen ($\hat{y}$ yang dibaca y topi) dari garis regresi. Selisih antara nilai variabel dependen yang diamati (y) dan nilai variabel dependen yang diprediksi ($\hat{y}$) disebut sebagai **residu** (ε yang dibaca epsilon). Maka dari itu, rumus residu ditulis sebagai berikut.

$$\text{Residu}\,(\varepsilon) = y - \hat{y}$$

Menurut kalian, jumlah nilai mutlak residu yang semakin kecil atau semakin besar yang akan membuat suatu model garis regresi semakin tepat? Ya, benar, semakin kecil jumlah nilai mutlak residu ini, maka garis semakin dekat ke data asli yang artinya semakin tepat pula garis yang digambar.

Meskipun demikian, perhitungan yang dilakukan ternyata tidak cukup hanya menggunakan konsep jumlah nilai mutlak residu, namun harus menggunakan konsep jumlah kuadrat dari nilai residu (rumus tertulis di bawah paragraf ini) seperti pada konsep perhitungan varians suatu data. Konsep jumlah kuadrat dari nilai residu dapat memberikan karakteristik khusus untuk membedakan setiap garis regresi yang mungkin terbentuk dari suatu kumpulan data yang tidak dapat diberikan oleh konsep jumlah nilai mutlak residu.

$$\text{Kuadrat residu } (\varepsilon^2) = (y - \hat{y})^2$$
$$\text{Jumlah kuadrat residu } \left(\sum \varepsilon^2\right) = \sum (y - \hat{y})^2$$

Perlu diingat bahwa setiap kumpulan data mempunyai jumlah kuadrat residu terkecil yang dapat dicapai oleh model garisnya. Dasar inilah yang digunakan dalam penurunan rumus untuk mencari persamaan garis regresi. Akan tetapi, hal ini tidak memungkinkan untuk diajarkan saat ini karena memerlukan ilmu kalkulus lanjutan. Karena itulah buku ini akan berusaha menjelaskannya secara deskriptif. Namun bagi kalian yang tertarik dan ingin belajar lebih lanjut, kalian dapat menemukannya di berbagai buku matematika untuk tingkat universitas atau sumber yang tepat dan baik dari internet.

Ayo Bereksplorasi

Ayo kita kembali pada Eksplorasi 3.3 dan melanjutkan lagi aktivitasnya. Kali ini kalian bisa menggunakan kalkulator untuk mempermudah perhitungan.

6. Dari garis *best-fit* yang telah kalian gambar, carilah persamaan garisnya dengan mencari gradien terlebih dahulu dan titik potong sumbu *y* kemudian lakukan substitusi ke dalam persamaan garis lurus $\hat{y} = mx + c$ di mana m adalah gradien dan *c* adalah titik potong sumbu *y*.
7. Gunakan hasil nomor 6 untuk mencari $\hat{y}$ dan lengkapilah tabel berikut ini untuk menghitung jumlah kuadrat residu.

x	y	$\hat{y}$	$y - \hat{y}$	$(y - \hat{y})^2$
10.000	2.000			
40.000	11.000			
25.000	8.000			

x	y	$\hat{y}$	$y - \hat{y}$	$(y - \hat{y})^2$
50.000	14.000			
15.000	5.000			
35.000	10.000			
30.000	7.000			
45.000	15.000			
Jumlah kuadrat residu				

8. Bandingkan hasil jumlah kuadrat residu kalian dengan teman-teman kalian. Prediksi garis *best-fit* yang mempunyai jumlah kuadrat residu terkecil adalah prediksi garis *best-fit* yang lebih tepat.

Latihan 3.3

1. Tabel berikut menunjukkan banyak tempat duduk terhadap biaya per jam dari tiga model pesawat terbang yang digunakan oleh maskapai Garuda Indonesia.

Model Pesawat	Banyak tempat duduk	Biaya (rupiah/jam)
A	50	1.100.000,00
B	100	2.100.000,00
C	150	2.700.000,00

Persamaan garis regresi mana yang lebih tepat untuk memprediksi banyak tempat duduk terhadap biaya?

$$\hat{y} = 367000 + 16000x \text{ atau } \hat{y} = 300000 + 16000x$$

2. Seorang siswa menyelidiki hubungan antara harga (y rupiah) dari 100 gram cokelat dan persentase kandungan cokelat (x %). Data yang diperoleh disajikan pada tabel berikut.

Merek Cokelat	x (% cokelat)	y (rupiah)
A	10	3.500,00
B	20	5.500,00
C	30	4.000,00
D	35	10.000,00
E	40	6.000,00
F	50	9.000,00
G	60	11.000,00
H	70	13.000,00

a. Gambarlah diagram pencar dari data tabel tersebut.
   Jika diketahui bahwa persamaan garis regresinya adalah
   $\hat{y} = 1700 + 154x$.
b. Gambarlah garis regresinya pada diagram pencar.
   Siswa tersebut melihat bahwa ada satu merek cokelat yang harganya terlalu tinggi.
c. Merek cokelat mana yang dimaksud oleh siswa tersebut? Jelaskan alasannya.
d. Siswa tersebut ingin memberikan saran harga yang cocok untuk cokelat tersebut. Berapakah prediksi harga yang cocok?

Eksplorasi 3.3 telah memberikan gambaran umum mengenai garis regresi. Sekarang, mari kita melihat bagaimana pendekatan yang dilakukan untuk memperoleh persamaan garis regresi yang memenuhi syarat dari metode kuadrat terkecil supaya kalian dapat menentukannya sendiri. Sama halnya untuk mendapatkan persamaan garis lurus pada umumnya, persamaan garis regresi sering dituliskan dalam bentuk umum berikut ini.

$$\hat{y} = a + bx$$

Bentuk persamaan di atas dibaca sebagai regresi y atas x, di mana:
$\hat{y}$ adalah nilai variabel dependen yang diprediksi
x adalah nilai variabel independen
a adalah titik potong sumbu y
b adalah gradien garis regresi

Maka dari itu, hal yang perlu dicari adalah nilai *a* dan *b*, dan kemudian nilai-nilai tersebut disubstitusikan ke dalam persamaan garis regresi di atas.

Nilai b dapat dihitung menggunakan konsep jumlah kuadrat variabel-variabelnya. Ada dua jenis jumlah kuadrat variabel yang akan digunakan dan disingkat menjadi *SS* yang merupakan singkatan dari "*sum of squares*" yang berarti jumlah kuadrat, yaitu:

1. Jumlah kuadrat selisih variabel independen x terhadap rata-ratanya dan variabel dependen y terhadap rata-ratanya.

$$SS_{xy} = \sum (x - \overline{x})(y - \overline{y}) \text{ atau } SS_{xy} = \sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n}$$

2. Jumlah kuadrat selisih variabel independen x terhadap rata-ratanya.

$$SS_{xx} = \sum (x - \overline{x})(x - \overline{x}) = \sum (x - \overline{x})^2 \text{ atau}$$

$$SS_{xx} = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}$$

Ingat, jika nilai SS_{xy} dan SS_{xx} berdiri sendiri masing-masing maka mereka tidak memiliki makna apa-apa. Mereka hanyalah perhitungan sementara yang digunakan untuk proses perhitungan berikutnya.

Nilai b dapat dihitung dengan menggunakan kedua jenis jumlah kuadrat di atas sehingga menjadi:

$$b = \frac{SS_{xy}}{SS_{xx}}$$

Tahap berikutnya kita perlu mencari nilai *a*. Untuk mencari ini, kita perlu mengetahui bahwa salah satu karakteristik garis regresi yang memenuhi syarat metode kuadrat terkecil adalah titik rata-ratanya $(\overline{x}, \overline{y})$ selalu dilalui garis regresi tersebut.

Oleh karena garis regresi linearnya adalah $\hat{y} = a + bx$ dan titik $(\overline{x}, \overline{y})$ dilalui garis tersebut maka dapat disubstitusikan sehingga menjadi:

$$\hat{y} = a + bx$$

$$\overline{y} = a + b\overline{x} \ldots\ldots \text{ substitusi } (\overline{x}, \overline{y})$$

$$a = \overline{y} - b\overline{x}$$

Sesuai dengan persamaan di atas, jadi untuk mencari nilai *a* kalian perlu mencari nilai $\overline{x}$, nilai $\overline{y}$ dan nilai b terlebih dahulu.

Setelah memperoleh nilai a dan b, substitusikan nilai-nilai tersebut ke dalam persamaan $\hat{y} = a + bx$. Maka akhirnya kalian akan mendapatkan persamaan garis regresinya.

Ayo kita gunakan tahapan dan rumus di atas untuk menyelesaikan permasalahan pada eksplorasi berikut ini serta menggunakan garis regresi yang diperoleh untuk interpretasi dan analisis lanjutan.

Eksplorasi 3.4

Tabel berikut ini berisi informasi dari 12 siswa SMA mengenai rata-rata waktu yang digunakan per hari dalam menggunakan media sosial (Facebook, Twitter, dan lain-lain) dan internet untuk bersosialisasi dan hiburan, dan nilai mereka.

Waktu (jam per hari)	4,4	6,2	4,2	1,6	4,7	5,4	1,3	2,1	6,1	3,3	4,4	3,5
Nilai	81	55	78	92	68	55	90	82	67	72	68	84

1. Gambarlah diagram pencar dari data di atas.
2. Apakah diagram pencarnya memberikan indikasi bahwa ada hubungan linear antara rata-rata waktu untuk media sosial dan internet dengan nilai?
3. Tentukan persamaan garis regresinya. Ikutilah tahapan berikut ini.
   a. Hitunglah nilai $\overline{x}$ dan $\overline{y}$
   b. Hitunglah nilai SS_{xy} dan SS_{xx}
   c. Hitunglah nilai b, gradien garis regresi, menggunakan hasil dari a) dan b).
   d. Hitunglah nilai a, titik potong sumbu y, menggunakan hasil dari a) dan c).
   e. Tentukan persamaan garis regresinya dengan menggunakan hasil dari c) dan d).
4. Interpretasikan masing-masing arti nilai a dan b yang ditemukan pada nomor 3.
5. Hitunglah prediksi nilai siswa yang menggunakan rata-rata waktu 3,8 jam per hari untuk media sosial dan internet menggunakan persamaan garis regresi yang ditemukan pada nomor 3.

6. Hitunglah prediksi nilai siswa yang menggunakan rata-rata waktu 16 jam per hari untuk media sosial dan internet menggunakan persamaan garis regresi yang ditemukan pada nomor 3. Berikan komentar mengenai hasil yang ditemukan.

Pada Eksplorasi 3.4 nomor 5 kalian telah melakukan suatu proses yang disebut interpolasi. **Interpolasi** adalah penggunaan hubungan antar variabel untuk memprediksi nilai yang berada di dalam jangkauan data. Sedangkan pada nomor 6 kalian telah melakukan suatu proses yang disebut ekstrapolasi. **Ekstrapolasi** adalah penggunaan hubungan antar variabel untuk memprediksi nilai yang berada di luar jangkauan data dengan asumsi bahwa hubungan ini berlaku meskipun di luar jangkauan data. Tentunya, hasil interpolasi lebih dapat dipercaya dibandingkan dengan ekstrapolasi.

Ayo Berkomunikasi

Coba diskusikan dengan teman-teman kalian, menurut kalian kapan hasil ekstrapolasi cukup dapat dipercaya?

Latihan 3.4

1. Pada saat kondisi mendadak, para pengendara mobil memerlukan waktu yang berbeda-beda untuk dapat bereaksi untuk menginjak rem mobil. Jarak yang diperlukan hingga terjadi reaksi menginjak rem disebut sebagai jarak reaksi. Tabel berikut ini memberikan informasi mengenai jarak reaksi dari mobil yang melaju dengan kecepatan yang berbeda-beda.

Kecepatan (km/jam)	Jarak Reaksi (m)
20	4,1
30	6,2
40	8,3
50	10,1
60	12,4
70	14,5

a. Gambarlah diagram pencar dari data di atas.
b. Apakah diagram pencarnya memberikan indikasi bahwa ada hubungan linear antara kecepatan dengan jarak reaksi?
c. Tentukan persamaan garis regresinya.
d. Interpretasikan nilai *a* dan *b* yang diperoleh pada bagian c).
e. Hitunglah prediksi jarak reaksi jika suatu mobil bergerak dengan kecepatan 35 km/jam.
f. Hitunglah prediksi jarak reaksi jika suatu mobil bergerak dengan kecepatan 55 km/jam.

2. Tabel berikut ini adalah data mengenai rata-rata tinggi badan anak perempuan yang berumur dari 2–14 tahun.

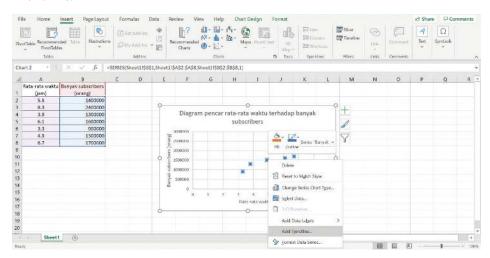
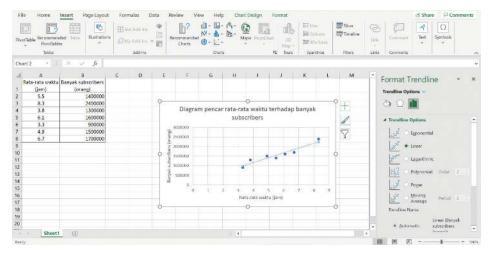
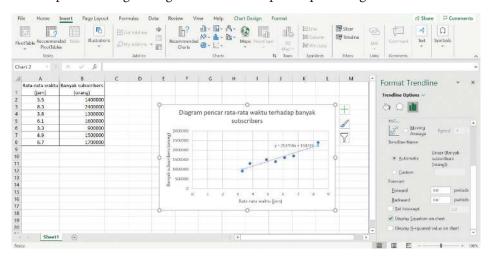
Umur (tahun)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Rata-rata tinggi (cm)	89	98	105	112	118	123	131	136	143	151	155	160	161

a. Gambarlah diagram pencar dari data di atas.
b. Apakah diagram pencarnya memberikan indikasi bahwa ada hubungan linear antara umur dengan rata-rata tinggi badan?
c. Tentukan persamaan garis regresinya.
d. Interpretasikan nilai *a* dan *b* yang diperoleh pada bagian c).
e. Hitunglah prediksi tinggi badan anak perempuan yang berumur 5,8 tahun.
f. Hitunglah prediksi tinggi badan seorang perempuan yang sudah berumur 30 tahun.
g. Berikan komentar mengenai reliabilitas nilai perkiraan di bagian f).

Ayo Berteknologi

Apakah kalian sudah mahir menggunakan aplikasi *Microsoft Excel* untuk menggambar diagram pencar? Kalian bisa selalu kembali ke bagian panduan untuk melatih ulang keterampilan menggambar diagram pencar. Ayo, kita berlatih kembali.

Kali ini kita akan menggunakan aplikasi yang sama untuk membantu menggambar garis regresi linear. Kalian juga bisa langsung tahu persamaan garis regresinya tanpa harus dihitung menggunakan rumus yang telah kalian pelajari sebelumnya. Sangat efisien, bukan? Yuk, perhatikan tahapan di bawah ini. Kita akan menggunakan data yang sama dengan latihan membuat diagram pencar sebelumnya.

1. Klik salah satu titik data pada diagram, kemudian klik kanan dan pilih “Add Trendline.”

2. Menampilkan garis regresi linear: Setelah tahapan no.1, akan ada tampilan menu tambahan di sebelah kanan dan pilihlah “Linear” pada Trendline Options.

3. Menampilkan persamaan garis regresi linear: pada menu yang sama di sebelah kanan, pada bagian bawahnya ada pilihan untuk menampilkan persamaan garis regresi, pastikan centang “Display Equation on chart” maka kalian dapat melihat bahwa persamaan garis regresi sudah ditampilkan pada diagram.

Mudah, bukan? Jika sudah terbiasa, maka tahapan ini hanya akan memerlukan waktu hitungan detik saja untuk menggambar garis regresi dan menemukan persamaan garis regresinya.

Ayo Berpikir Kritis

Ayo bandingkan persamaan garis yang diberikan oleh *Microsoft Excel* dengan hasil perhitungan persamaan garis regresi menggunakan rumus.

1. Apakah jawaban kalian sama atau berbeda?
2. Jika jawabannya berbeda, apa penyebab perbedaan tersebut?
3. Interpretasikan nilai koefisien dari variabel x pada garis regresi yang kalian dapatkan dikaitkan dengan rata-rata waktu dan banyak *subscribers*.
4. Berapa banyak *subscribers* dari seorang *YouTuber* yang bekerja dengan rata-rata waktu 5 jam per hari?

Ayo Berkomunikasi

Jika memang penggunaan teknologi akan mempermudah segala hal baik dalam menggambar diagram pencar, menggambar garis regresi dan menemukan persamaan garis regresi, kenapa kalian masih harus melakukan semua hal di atas secara manual dengan menggunakan gambar tangan dan menggunakan rumus?

Ayo Berefleksi

Mari kita merefleksikan kembali hal-hal apa saja yang telah kita pelajari.

1. Apakah saya sudah bisa menentukan persamaan garis regresi?
2. Apakah saya sudah bisa memberikan interpretasi komponen garis regresi, yaitu gradien dan titik potong sumbu y?
3. Apakah saya sudah bisa melakukan proses interpolasi dan ekstrapolasi?

C. Analisis Korelasi

1. Pengertian

Analisis korelasi merupakan salah satu metode statistika yang paling banyak digunakan di dalam berbagai penelitian ilmiah. Sejauh ini kalian sudah dapat menemukan persamaan garis regresi untuk data bivariat dan kalian juga sudah tahu bahwa garis regresi yang ditemukan dengan perhitungan rumus yang diberikan adalah garis yang sudah paling tepat mewakili data yang ada. Meskipun demikian, kita masih ada kendala untuk interpretasi lebih lanjut jika hanya menggunakan garis tersebut. Sebagai pemanasan, diskusikan dengan teman-teman kalian pertanyaan di bawah ini.

Ayo Berkomunikasi

Setiap manusia pasti mempunyai ukuran tinggi badan. Namun, apa dasarnya ketika kalian mengatakan bahwa seseorang memiliki badan yang tinggi atau pendek? Berikan contoh dan alasan kalian.

Kalian pasti menyadari bahwa untuk menyatakan tinggi atau pendek, kalian memerlukan suatu standar dan standar itu sangat bervariasi perbedaannya satu orang dengan yang lainnya. Ketika kita mengambil kesimpulan dari suatu data, tentunya kita perlu suatu standar yang pasti agar setiap orang tidak mengambil kesimpulan yang berbeda-beda. Oleh karena itu, suatu korelasi memiliki suatu standar nilai tingkat korelasi. Nilai ini merupakan ukuran deskriptif numerik dari korelasi yang disebut **koefisien korelasi**. Koefisien ini akan memberikan informasi arah tren data dan sekaligus tingkat korelasinya apakah kuat, sedang, atau lemah.

Selain dari analisis di atas, kita perlu mengetahui seberapa tepat suatu garis regresi terhadap data asli. Kalian sudah mempelajarinya, bukan? Ingatkah kalian mengenai jumlah kuadrat residu terkecil? Ternyata ada hal yang bisa lebih tepat untuk menentukan ketepatan suatu garis. Hal ini dapat dilihat dari berapa proporsi (persentase) dari variabel dependen yang diterangkan oleh variabel independen yang disebut sebagai **koefisien determinasi**.

Ayo Berkomunikasi

Mengapa kita masih memerlukan koefisien determinasi meskipun sudah ada konsep jumlah kuadrat residu terkecil? Diskusikan dengan dasar kesimpulan pada diskusi sebelumnya.

Sekarang sudah tahu, kan, kenapa kita perlu mempelajari analisis korelasi lebih lanjut? Ayo kita pelajari satu per satu secara lebih mendalam mengenai koefisien korelasi dan koefisien determinasi dan apa hubungan antara keduanya.

2. Korelasi *Product Moment*

Pada bagian ini kalian akan diperkenalkan mengenai konsep koefisien korelasi. Koefisien korelasi yang akan kalian gunakan adalah **Korelasi *Product Moment***. Terkadang nama penemunya juga dimasukkan ke dalam nama korelasi ini sehingga menjadi **Korelasi Pearson *Product Moment*** atau **Koefisien Korelasi Pearson**. Koefisien korelasi ini merupakan jenis koefisien korelasi yang paling umum digunakan.

Tahukah Kamu?

Karl Pearson (1895–1980) merupakan seseorang yang tertarik pada banyak cabang ilmu termasuk matematika, fisika, agama, sejarah, sosial, dan lainnya. Pearson dilahirkan dan besar di London. Karl Pearson banyak berkarya dalam ilmu statistika sehingga banyak ahli statistika yang mengaguminya. Selain berkontribusi dalam menemukan koefisien korelasi Pearson (r), ia juga yang memperkenalkan istilah standar deviasi atau simpangan baku (σ) yang pastinya sudah tidak asing lagi bagi kalian.

Gambar 3.9 Karl Pearson

Sumber: en.wikipedia.org/wiki (2021)

Ayo, kita melihat bagaimana cara kalian dapat menemukan nilai koefisien korelasi ini.

Konsep korelasi *product moment* ini tidak jauh dari konsep yang sering kita gunakan yaitu jumlah kuadrat. Terakhir, kalian telah mempelajari dua jenis jumlah kuadrat variabel yaitu SS_{xy} dan SS_{xx} dengan masing-masing artinya. Kali ini kita akan menggunakan tiga jenis jumlah kuadrat di mana terdapat tambahan satu lagi dari yang sebelumnya. Ketiga jenis tersebut yaitu:

1. Jumlah kuadrat selisih variabel independen *x* terhadap rata-ratanya dan variabel dependen *y* terhadap rata-ratanya.

$$SS_{xy} = \sum (x - \overline{x})(y - \overline{y}) \text{ atau } SS_{xy} = \sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n}$$

2. Jumlah kuadrat selisih variabel independen *x* terhadap rata-ratanya.

$$SS_{xx} = \sum (x - \overline{x})(x - \overline{x}) = \sum (x - \overline{x})^2 \text{ atau}$$

$$SS_{xx} = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}$$

3. Jumlah kuadrat selisih variabel dependen *y* terhadap rata-ratanya.

$$SS_{yy} = \sum (y - \overline{y})(y - \overline{y}) = \sum (y - \overline{y})^2 \text{ atau}$$

$$SS_{yy} = \sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}$$

Untuk menghitung nilai Korelasi *Product Moment* (r), substitusikan nilai dari ketiga jenis jumlah kuadrat ke dalam rumus Korelasi *Product Moment* di bawah ini.

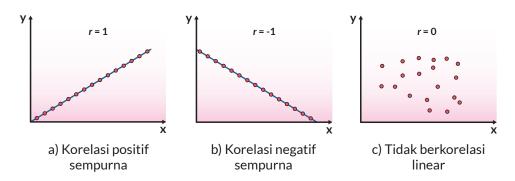
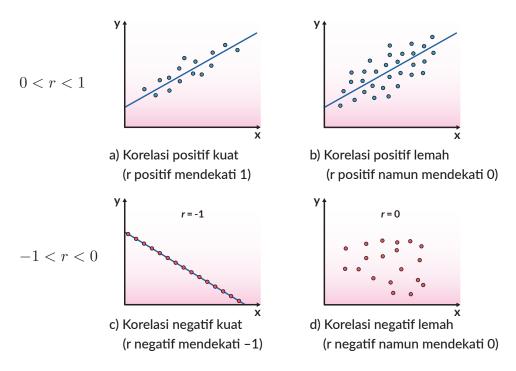
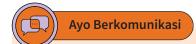
$$r = \frac{SS_{xy}}{\sqrt{SS_{xx}SS_{yy}}}$$

Nilai r yang diperoleh akan selalu berada pada interval $-1 \leq r \leq 1$.

Ayo, kita lihat bagaimana kalian dapat menginterpretasikan nilai r yang diperoleh dari perhitungan dengan rumus di atas dan hubungannya dengan diagram pencarnya.

Ayo Berteknologi

Gunakan tautan atau kode QR berikut ini sebagai simulasi untuk melihat bagaimana garis regresi akan bergerak dan bagaimana nilai koefisien korelasinya berubah terhadap penyebaran datanya. Gunakan Gambar 3.10 dan 3.11 di bawah ini sebagai bahan referensi tambahan ketika melakukan simulasi.

https://www.geogebra.org/m/XJ4t8bch

Gambar 3.10 Nilai *r* dan Hubungan Antara Dua Variabel

Gambar 3.11 Hubungan Nilai *r* dan Penyebaran Data dari Garis Regresi

Kesimpulan apa yang dapat kalian ambil dari Gambar 3.10 di atas mengenai nilai *r* ?

1. Jika tetap dipaksakan, apakah kalian tetap dapat menggambar suatu garis regresi pada data di Gambar 3.10 c)? Berikan alasan kalian.
2. Kesimpulan apa yang dapat kalian ambil dari Gambar 3.11 di atas mengenai nilai *r* ?

Terlihat bahwa jika nilai mutlak dari r semakin mendekati 0 (semakin kecil), maka semakin lemah atau tidak ada korelasi antara variabel x dan y, sedangkan jika nilai mutlak dari r semakin mendekati 1 (semakin besar), maka semakin kuat korelasi antara variabel x dan y.

Mengapa kita menggunakan konsep mutlak dari r ? Perlu diingat bahwa nilai $r = -0{,}97$ memiliki korelasi yang lebih kuat dibanding nilai $r = 0{,}62$ karena tanda negatif di depan angka hanya menunjukkan arah tren data yang berkorelasi negatif.

Supaya suatu nilai r dapat mendeskripsikan lebih jelas tentang suatu korelasi antar dua variabel, maka terkadang nilai koefisien korelasi r sering dibuat dalam interval tertentu dengan deskripsi tingkat hubungan korelasi masing-masing. Perhatikan tabel berikut ini sebagai pedoman menentukan deskripsi tingkat hubungan korelasi.

Tabel 3.2 Tingkat Hubungan Koefisien Korelasi

Nilai r	Tingkat Korelasi
0	Tidak ada korelasi
$-0,3 \leq r < 0$ dan $0 < r \leq 0,3$	Lemah
$-0,7 \leq r < -0,3$ dan $0,3 < r \leq 0,7$	Sedang/Cukup
$-1 < r < -0,7$ dan $0,7 < r < 1$	Kuat
-1 dan 1	Sempurna

Rentang nilai r dan deskripsi yang tertera pada tabel di atas merupakan salah satu model saja yang digunakan untuk mendeskripsikan tingkat hubungan korelasi antara dua variabel. Jika kalian mencari di berbagai buku atau sumber lainnya, maka kalian akan memperoleh model yang berbeda lagi karena adanya perbedaan rentang dan derajat tingkat hubungan korelasi.

Ayo kita gunakan rumus dan interpretasi nilai r di atas untuk menyelesaikan permasalahan pada eksplorasi berikut ini.

Eksplorasi 3.5

Persiapan: pita pengukur atau meteran

Leonardo da Vinci adalah seorang ilmuwan dan seniman yang menggabungkan keterampilan ini untuk menyusun instruksi untuk seniman lain tentang bagaimana proporsi tubuh manusia dalam lukisan dan patung. Tiga dari aturan Leonardo adalah:

Gambar 3.12 Leonardo da Vinci
Sumber: gettyimages.com/mikroman6

- tinggi badan sama dengan panjang rentang lengan terentang;
- tinggi saat berlutut adalah tiga perempat dari tinggi berdiri;
- panjang tangan (dari pergelangan ke ujung jari tengah) adalah sepersembilan dari tinggi badan.

Ayo Bekerja Sama

1. Bekerja sama dengan teman-teman kalian untuk mengukur tinggi badan, tinggi saat berlutut, rentang lengan terentang, dan panjang tangan. Gabungkan data-data kalian dalam suatu tabel.
2. Periksa tiga aturan Leonardo secara visual dengan membuat tiga diagram pencar yang berbeda.
3. Untuk gambar diagram pencar yang memiliki bentuk tren linear, tentukan persamaan garis regresinya dan nilai koefisien korelasi *r*.
4. Interpretasikan nilai gradien dari garis regresi masing-masing.
5. Interpretasikan nilai koefisien korelasi *r* masing-masing.
6. Apakah ketiga hubungan yang digambarkan oleh Leonardo berlaku? Bagaimana tingkat hubungan korelasinya?

Penguatan Karakter

Dalam konteks eksplorasi ini, kita dapat melihat bawah manusia adalah ciptaan Tuhan yang indah. Kita mempunyai kondisi fisik yang berbeda-beda, namun dalam suatu dasar hukum alam yang sama. Marilah kita menjaga tubuh kita dengan baik dan hargailah kondisi fisik orang-orang di sekitar kita karena kita semua sama derajatnya di hadapan Tuhan.

Berdasarkan Eksplorasi 3.5, kalian sudah menerapkan koefisien korelasi untuk analisis korelasi yang kalian temukan dalam suatu permasalahan nyata yaitu memastikan klaim atau pernyataan dari seseorang apakah berlaku secara umum atau tidak. Masih ingatkah kalian mengenai diskusi tentang pengaruh atau akibat dari kebakaran hutan pada awal bab ini? Jika kalian mempunyai data yang tepat, maka dengan ilmu statistika yang telah kalian pelajari hingga saat ini, kalian sudah dapat mengambil suatu kesimpulan yang baik dan tepat.

Kalian pasti juga sudah mendapat gambaran bagaimana hubungan antara suatu kejadian, data yang diperoleh, sketsa diagram pencar, nilai r dan interpretasinya. Ayo berpikir lebih jauh mengenai kemungkinan kejadian jika hanya diberikan kondisi nilai r.

Ayo Berpikir Kreatif

Berikan kasus dalam kehidupan nyata yang melibatkan hubungan dua variabel dalam kondisi berikut ini.

1. r bernilai positif dengan hubungan kuat

2. r bernilai positif dengan hubungan sedang/cukup

3. r bernilai negatif dengan hubungan kuat

4. r bernilai negatif dengan hubungan lemah

Latihan 3.5

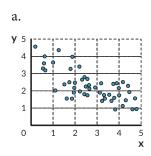
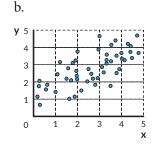
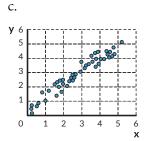
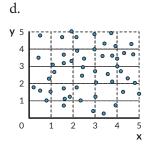
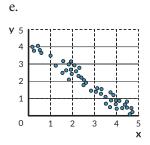
1. Pasangkan kelima diagram pencar berikut ini dengan nilai korelasinya, dengan pilihan –0,95; –0,5; 0; 0,5; dan 0,95.

a.

b.

c.

d.

e.

2. Berikut ini adalah 8 kumpulan data buatan. Tentukan nilai r untuk setiap kumpulan data, jika memungkinkan tanpa perlu menghitung. Gambarlah sketsa diagram pencarnya untuk membantu penentuan nilai r ini.

a.

x	y
–1	–1
0	0
1	1

b.

x	y
–1	–1
0	1
1	0

c.

x	y
–1	0
1	0
1	–1

d.

x	y
–1	1
0	0
1	–1

e.

x	y
99	9
100	10
101	11

f.

x	y
15	30
20	40
25	20

g.

x	y
1003	80
1005	82
1009	81

h.

x	y
9,9	1000
10	2000
10,1	0

3. Tabel berikut ini merupakan daftar nilai ujian tengah semester dan nilai ujian akhir semester pelajaran Matematika dari 7 siswa di kelas XI.

Nilai ujian tengah semester	79	95	81	66	87	94	59
Nilai ujian akhir semester	85	97	78	76	94	84	67

   a. Menurut kalian apakah nilai ujian tengah semester dan nilai ujian akhir semester akan berkorelasi positif atau negatif?
   b. Gambarlah diagram pencarnya.
   c. Dengan melihat pada diagram pencarnya, bagaimana nilai koefisien korelasi yang tepat menurut kalian, apakah mendekati 0, 1 atau –1?
   d. Hitunglah nilai r. Apakah nilai r yang diperoleh sesuai dengan prediksi kalian di bagian a) dan c)?

4. Seorang pemilik toko es krim lokal di Bekasi ingin menentukan apakah suhu udara berpengaruh terhadap bisnisnya. Tabel berikut ini berisi data suhu udara pada pukul 12.00 selama 10 hari berturut-turut tanpa hujan pada musim kemarau dan jumlah pembeli yang dapat membeli es krim di toko tersebut.

Suhu udara (°C)	30	27,2	33,3	32,2	36,1	35,6	31,7	31,7	30,6	28,9
Pembeli (orang)	317	355	463	419	507	482	433	388	362	340

a. Dengan suhu udara sebagai variabel independen dan banyak pembeli sebagai variabel dependen, hitunglah nilai dari SS_{xy}, SS_{xx} dan SS_{yy} .
b. Gambarlah diagram pencarnya.
c. Apakah diagram pencarnya memberikan gambaran hubungan positif atau negatif antara suhu udara dan banyak pembeli?
d. Tentukan persamaan garis regresinya dalam bentuk $\hat{y} = a + bx$.
e. Berikan interpretasi arti nilai *a* dan *b* pada perhitungan d).
f. Hitunglah nilai koefisien korelasi *r*.
g. Berikan interpretasi nilai *r* terhadap korelasi antara suhu udara dan banyak pembeli.
h. Berikan prediksi berapa banyak pembeli pada saat suhu udaranya 22,8°C. Jelaskan apakah prediksi kalian sudah tepat berdasarkan gambar pada bagian b)?

3. Koefisien Determinasi

Pada bagian ini kita akan mempelajari nilai yang menyatakan seberapa tepat suatu garis regresi dari perspektif proporsi (persentase) dari variabel dependen yang diterangkan oleh variabel independen yang disebut sebagai **koefisien determinasi**. Simbol yang digunakan adalah r^2.

Kalian telah mempelajari mengenai koefisien korelasi yang mempunyai simbol *r*, sehingga akan sangat mudah untuk memperoleh nilai koefisien determinasi (r^2) yaitu hanya dengan menguadratkan koefisien korelasi (*r*) atau kalian dapat menggunakan jumlah kuadrat variabel (SS_{xy}, SS_{xx}, dan SS_{yy}) seperti perhitungan pada koefisien korelasi (*r*) kemudian substitusikan ke dalam rumus koefisien determinasi (r^2) di bawah ini.

$$r = \frac{SS_{xy}}{\sqrt{SS_{xx}SS_{yy}}}$$

$$r^2 = \frac{{SS_{xy}}^2}{SS_{xx}SS_{yy}}$$

Ayo kita lihat rentang nilai yang pasti akan kalian dapatkan ketika menghitung koefisien determinasi (r^2).

Karena nilai *r* mempunyai rentang nilai $-1 \leq r \leq 1$, maka r^2 mempunyai rentang nilai $0 \leq r \leq 1$.

Ayo Berpikir Kritis

Buktikan dengan perhitungan rentang nilai r^2 dengan dasar rentang nilai r.

Nilai koefisien determinasi (r^2) yang mempunyai rentang nilai $0 \leq r \leq 1$ sering diubah ke persentase dengan dikalikan dengan 100 untuk proses interpretasi persentase dari variabel dependen yang diterangkan oleh variabel independen sesuai dengan definisinya. Sebagai contoh, pada konteks di awal bab mengenai hubungan waktu rata-rata yang didedikasikan per hari dengan banyak *subscribers*, nilai r^2 yang diperoleh dari data yang disajikan adalah 0,8988. Nilai r^2 pada model tersebut memberikan gambaran bahwa 89,88% dari banyak *subscribers* diterangkan oleh waktu rata-rata yang didedikasikan per hari, dengan sisanya sebesar 10,12% dari *banyak subscribers* diterangkan oleh variabel-variabel lainnya.

Ayo kita gunakan konsep di atas pada eksplorasi berikut ini.

Ayo Bereksplorasi

Eksplorasi 3.6

Diagram pencar di bawah ini menunjukkan tingkat IQ seseorang terhadap lingkar kepalanya dalam cm dari sampel 20 orang. Rata-rata IQ adalah 101 dan rata-rata lingkar kepala adalah 56,125 cm. Nilai koefisien korelasinya adalah 0,138.

Gambar 3.13 Hubungan Antara Lingkar Kepala dan IQ

1. Jika kalian tidak mengetahui apa-apa mengenai hubungan antara IQ dan lingkar kepala, menurut kalian berapa IQ seseorang yang lingkar kepalanya 54 cm?
2. Persamaan garis regresinya adalah IQ = 0,997 × lingkar kepala + 45. Berapa perubahan IQ seseorang ketika lingkar kepala bertambah 1 cm?

3. Berapa IQ yang diprediksi persamaan garis ini untuk seseorang dengan lingkar kepala 54 cm? Seberapa besar keyakinan kalian terhadap prediksi ini?
4. Berapa persentase IQ yang diterangkan oleh lingkar kepala?
5. Berapa persentase IQ yang diterangkan oleh variabel-variabel lainnya?
6.

   Menurut kalian, variabel-variabel lain apakah yang menerangkan tingkat IQ seseorang?

Berdasarkan Eksplorasi 3.6, kalian dapat melihat bahwa proses analisis korelasi tidak terlepas satu dengan yang lainnya dimulai dari diagram pencar, persamaan garis regresi, nilai koefisien korelasi, dan nilai koefisien determinasi. Semua hal tersebut digabungkan untuk memberikan prediksi yang tepat dan meyakinkan.

Penguatan Karakter

Ingatlah bahwa ilmu statistika bukan hanya sekadar menghitung dan menggunakan rumus, tetapi kalian perlu mengerti apa yang kalian hitung dan apa interpretasi hasil hitungan tersebut. Semua hal itu akan kalian gunakan untuk memprediksi dan membuat kesimpulan yang tepat supaya kesimpulan tersebut dapat bermanfaat dan berkontribusi di dalam pengembangan ilmu pengetahuan, sosial dan bernegara.

Latihan 3.6

1. Nyoman mengumpulkan data mengenai kandungan lemak (gram) dan kalori pada tujuh jenis *pizza* pada tabel berikut. Dengan menggunakan data di bawah ini, Nyoman memperoleh nilai koefisien determinasi sebesar 0,8242. Apa interpretasi dari nilai tersebut dalam konteks kandungan lemak (gram) dan kalori?

Lemak (gram)	Kalori
9,0	230
19,5	385
14,0	280
12,0	305
8,0	230
14,2	350
15,0	370

2. Tabel berikut ini memberikan informasi mengenai kandungan gula (gram) dan jumlah kalori dalam satu sajian dari 13 sampel suatu merek sereal.

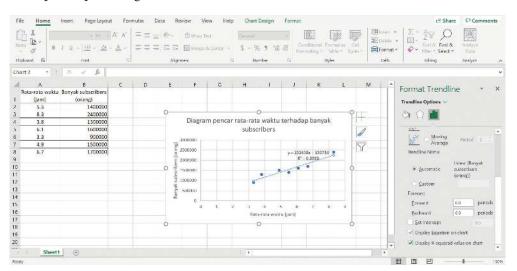
Gula (gram)	4	15	12	11	8	6	7	2	7	14	20	3	13
Kalori	120	200	140	110	120	80	190	100	130	190	190	110	120

   a. Hitunglah nilai koefisien determinasinya.
   b. Berikan interpretasi dari nilai koefisien determinasi yang didapatkan pada bagian a).

Ayo Berteknologi

Apakah kalian sudah mahir menggunakan aplikasi *Microsoft Excel* untuk menggambar diagram pencar, memunculkan garis regresi, dan persamaan garis regresi? Kalian bisa selalu kembali ke bagian panduan untuk melatih ulang keterampilan untuk menggambar diagram pencar, memunculkan garis regresi, dan persamaan garis regresi. Ayo, kita melatih kembali.

Kali ini kita akan menggunakan aplikasi yang sama untuk membantu kita dalam menentukan nilai koefisien determinasi (r^2). Sangat efisien, bukan? Yuk, perhatikan tahapan di bawah ini. Kita akan menggunakan data yang sama dengan latihan membuat diagram pencar, memunculkan garis regresi, dan persamaan garis regresi sebelumnya.

Untuk menampilkan nilai koefisien determinasi (r^2), pada menu di sebelah kanan sama seperti saat menampilkan garis regresi dan persamaan garis regresinya, pada bagian bawahnya ada pilihan untuk menampilkan nilai r^2, pastikan centang "Display R-squared value on chart" maka kalian dapat melihat bahwa nilai r^2 sudah ditampilkan pada diagram.

Mudah, bukan? Jika sudah terbiasa maka tahapan ini hanya akan menggunakan waktu hitungan detik saja untuk menentukan nilai koefisien determinasi (r^2). Namun, yang menjadi pertanyaannya adalah apakah ada menu sederhana untuk menampilkan nilai koefisien korelasi (r) seperti untuk menampilkan nilai koefisien determinasi (r^2)? Sayangnya memang *Microsoft Excel* tidak menyediakan menu sederhana untuk ini. Akan tetapi, bukannya mudah ya untuk menemukan nilai r jika sudah diberikan nilai r^2?

Ayo Berpikir Kritis

Meskipun *Microsoft Excel* tidak memberikan menu sederhana untuk menampilkan nilai r, bagaimana caranya agar kalian dapat mendapatkan nilai r dari nilai r^2 yang ditampilkan?

Tahukah Kamu?

Kalian juga bisa memperoleh nilai r dengan menggunakan sintaks di *Microsoft Excel* yaitu dengan mengetikkan =**CORREL(array1;array2)** dengan **array1** diisi dengan deretan data variabel independen x dan **array2** diisi dengan deretan data variabel dependen y.

Ayo Berteknologi

Mata uang Indonesia, yaitu rupiah, pasti memiliki nilai tukar terhadap berbagai mata uang asing. Dikatakan bahwa salah satu hal yang memengaruhi nilai tukar mata uang adalah tingkat inflasi di suatu negara. Ayo, kita coba cari tahu apakah benar bahwa tingkat inflasi memengaruhi nilai tukar rupiah terhadap mata uang asing dan seberapa berpengaruh terhadap nilai tukar rupiah berdasarkan koefisien determinasi yang ditemukan nantinya. Setelah itu, carilah variabel-variabel apa lagi yang mungkin memengaruhi nilai tukar rupiah.

Untuk kasus ini, mari kita gunakan nilai tukar rupiah terhadap dolar AS. Berikut ini adalah data inflasi bulanan di Indonesia dan nilai tukar rupiah terhadap dolar AS pada setiap akhir bulan pada tahun 2020. Kalian juga dapat menggunakan data tahun-tahun sebelumnya atau sesudahnya dari sumber yang tertera agar analisis kalian lebih tepat lagi. Gunakanlah teknologi seperti *Microsoft Excel* dan lainnya untuk mempermudah analisis kalian.

Tabel 3.3 Tingkat Inflasi dan Nilai Tukar Rupiah Terhadap Dolar AS pada Tahun 2020

Bulan	Tingkat inflasi	Nilai tukar rupiah terhadap dolar AS
Januari	2,68%	Rp13.662,00
Februari	2,98%	Rp14.234,00
Maret	2,96%	Rp16.367,00
April	2,67%	Rp15.157,00
Mei	2,19%	Rp14.733,00

Bulan	Tingkat inflasi	Nilai tukar rupiah terhadap dolar AS
Juni	1,96%	Rp14.302,00
Juli	1,54%	Rp14.653,00
Agustus	1,32%	Rp14.554,00
September	1,42%	Rp14.918,00
Oktober	1,44%	Rp14.690,00
November	1,59%	Rp14.128,00
Desember	1,68%	Rp14.105,00

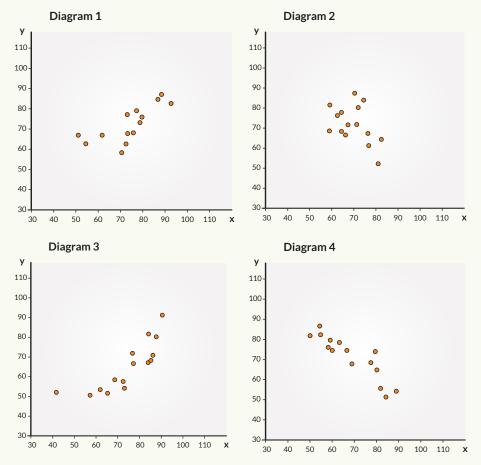
Sumber: www.bi.go.id (2021)
www.statistik.kemendag.go.id (2021)

Ayo Berefleksi

Mari kita merefleksikan kembali hal-hal apa saja yang telah kita pelajari.

1. Apakah saya sudah bisa menghitung nilai koefisien korelasi?
2. Apakah saya sudah bisa menginterpretasikan nilai koefisien korelasi?
3. Apakah saya sudah bisa menghitung nilai koefisien determinasi?
4. Apakah saya sudah bisa menginterpretasikan nilai koefisien determinasi?
5. Apakah saya sudah bisa menjelaskan hubungan antara koefisien korelasi dan koefisien determinasi?
6. Apakah saya sudah bisa mengolah, menginterpretasikan, dan menyimpulkan hasil pengolahan suatu data secara benar dan efektif dengan menggunakan diagram pencar, arah dan bentuk tren data, persamaan garis regresi, koefisien korelasi, dan koefisien determinasi?

Uji Kompetensi

1. Pada setiap diagram pencar di bawah ini:

Tentukan:

a. Apakah ada hubungan antara variabel *x* dan *y*?

b. Jika ya, apakah hubungannya linear atau kurva/non-linear?

c. Apakah hubungannya positif atau negatif?

2. Untuk setiap pasangan variabel berikut ini, berikan pendapat kalian apakah mereka mempunyai korelasi positif, korelasi negatif atau tidak berkorelasi (korelasi mendekati 0).

a. Bunga dan banyak pinjaman bank

b. Tinggi badan dan IQ

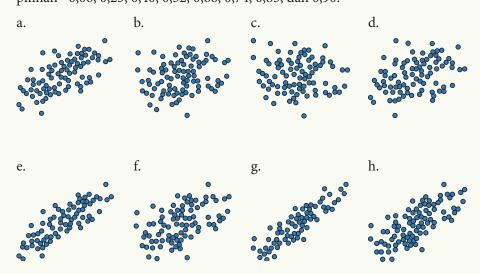
c. Tinggi badan dan ukuran sepatu

d. Banyak pohon dan tingkat polusi

3. Sebuah perusahaan manufaktur mobil ingin menyelidiki bagaimana harga salah satu model mobilnya terdepresiasi (penurunan) seiring bertambahnya usia mobil. Departemen riset di perusahaan mengambil sampel delapan mobil model ini dan mengumpulkan informasi berikut tentang usia (dalam tahun) dan harga (dalam jutaan rupiah) mobil-mobil ini.

Usia (tahun)	8	3	6	9	2	5	6	3
Harga (jutaan rupiah)	45	210	100	33	267	134	109	235

   a. Gambarlah diagram pencar dari data di atas.
   b. Apakah diagram pencarnya memberikan indikasi bahwa ada hubungan linear antara usia dan harga mobil?
   c. Tentukan persamaan garis regresinya di mana harga sebagai variabel dependen dan usia sebagai variabel independen.
   d. Interpretasikan nilai a dan b yang diperoleh pada bagian c).
   e. Hitunglah prediksi harga mobil yang berusia 7 tahun.
   f. Hitunglah prediksi harga mobil yang berusia 18 tahun.
   g. Berikan komentar kalian mengenai hasil perhitungan bagian g).

4. Setiap diagram pencar di bawah ini dibuat pada sumbu x dan y yang sama. Pasangkan setiap diagram pencar berikut ini dengan nilai korelasinya, dengan pilihan –0,06; 0,25; 0,40; 0,52; 0,66; 0,74; 0,85; dan 0,90.

5. Untuk setiap kumpulan pasangan data di bawah ini, hitunglah nilai koefisien korelasinya.

   a. (−2, −1), (−1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 1)

   b. (−2, 2), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (2, 4)

6. Pada pelajaran Biologi, siswa bekerja sama dalam kelompok-kelompok untuk menghitung korelasi antara suhu udara dan berapa kecepatan bunyi mengerik seekor jangkrik. Setiap kelompok menggunakan jangkrik dan berada pada suhu yang sama, tetapi ada kelompok yang menggunakan pengukuran suhu dalam Fahrenheit (^{o}F) dan beberapa menggunakan Celcius (^{o}C). Ada kelompok yang mengukur kecepatan bunyi mengerik dalam berapa kali mengerik per detik dan ada yang berapa kali mengerik per menit. Ada kelompok yang menggunakan variabel x sebagai suhu udara dan variabel y sebagai berapa kali mengerik per satuan waktu sedangkan ada kelompok yang membaliknya.

   a. Apakah semua siswa akan memperoleh gradien yang sama pada garis regresi linearnya? Jelaskan alasan kalian.

   b. Apakah semua kelompok akan memperoleh nilai yang sama untuk koefisien korelasi? Jelaskan alasan kalian.

7. Gambarlah diagram pencar dan hitunglah nilai r dan r^2 dari setiap kumpulan data berikut ini.

   a.

x	−2	−1	0	1	2
y	−2	1	2	5	6

   b.

x	0	1	3	5	6
y	0	1	2	1	0

8. Deskripsikan gradien dari garis regresi dengan nilai r atau r^2 berikut ini.

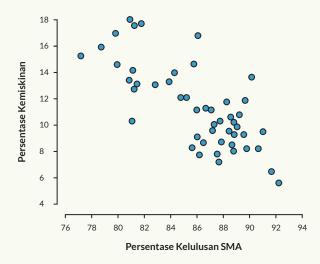
   a. $r = 0,7$

   b. $r = -0,7$

   c. $r = 0$

   d. $r^2 = 0,64$

9. Rizki ingin mengetahui hubungan tingkat kelulusan SMA dan tingkat kemiskinan. Data yang diperoleh oleh Rizki disajikan dalam bentuk diagram pencar berikut. Selain dari itu, Rizki juga memperoleh nilai koefisien determinasinya sebesar 0,558 dan menemukan persamaan garis regresi linear yang dinyatakan sebagai berikut.

Persentase Kemiskinan = 64 + 0,621 × Persentase Kelulusan SMA

a. Berikan interpretasi dari nilai koefisien determinasi yang didapatkan Rizki dalam konteks data di atas.

b. Tentukan nilai koefisien korelasi r.

c. Apakah dengan adanya hubungan linear di sini menyiratkan bahwa suatu negara yang menaikkan tingkat persentase kelulusannya akan menyebabkan tingkat persentase kemiskinannya turun? Jelaskan alasan kalian.

10. Berikut ini adalah data mengenai banyak karyawan pada suatu taman bermain dengan luas taman bermain tersebut. (Disarankan untuk menggunakan teknologi dalam membantu perhitungan ini)

Banyak karyawan (y)	Luas taman bermain (x) dalam m^2
95	39.334
95	324
102	17.315
69	8.244
67	620.231
77	43.501
81	8.625
116	31.572
51	14.276

Banyak karyawan (y)	Luas taman bermain (x) dalam m^2
36	21.094
96	103.289
71	130.023
76	16.068
112	3.286
43	24.089
87	6.309
131	14.502
138	62.595
80	23.666
52	35.833

a. Gambarlah diagram pencarnya.

b. Tentukan persamaan garis regresinya.

c. Hitunglah nilai r^2.

d. Apakah garis regresi tersebut akan memberikan hasil yang akurat? Jelaskan alasanmu.

e. Hapuslah data pada variabel x dengan nilai yang terbesar dan hitung ulang persamaan garis regresinya.

f. Apakah hasil pada bagian e) sangat memengaruhi persamaan garis yang baru tersebut jika dibandingkan dengan yang sebelumnya? Jelaskan mengapa hal ini dapat terjadi.

Pengayaan

Pergilah ke supermarket atau minimarket terdekat dan carilah 30 jenis makanan yang ada tertera daftar nutrisi pada pembungkusnya. Untuk setiap makanan, periksalah kadar lemak (dalam gram) dan garam (dalam miligram) per sajian. Pastikan kalian memilih varietas makanan yang beragam untuk memperoleh variasi nilai antara kedua variabel ini. Sebagai contoh, jika kalian memilih 30 jenis mie instan, maka tidak akan memberikan proses analisis yang menarik.

1. Buatlah diagram pencar dari data yang terkumpul.
2. Apakah diagram pencar yang telah dibuat memberikan gambaran bahwa data tersebut dapat diwakili dengan suatu garis regresi?
3. Tentukan persamaan garis regresi untuk data kalian. Jika dapat dibuat suatu garis regresi, maka interpretasikan nilai dari gradien dan titik potong sumbu y garis tersebut. Jika tidak dapat dibuat suatu garis regresi, berikan alasan mengapa persamaan garis regresi ini akan memberikan interpretasi yang salah.
4. Hitunglah koefisien korelasi dari kedua variabel ini. Bagaimana hubungan antara kedua variabel tersebut dari nilai koefisien korelasi yang kalian dapatkan?
5. Hitunglah koefisien determinasi dari kedua variabel ini. Interpretasikan nilai koefisien determinasi yang kalian dapatkan.

Glosarium

apotema: jarak dari pusat lingkaran ke tali busur

busur lingkaran: bagian dari lingkaran

data bivariat: data yang terdiri atas dua variabel kuantitatif

diameter: ruas garis yang menghubungkan dua titik pada lingkaran yang melalui pusat lingkaran

domain atau daerah asal: himpunan yang memuat nilai-nilai masukan (input) di mana fungsi tersebut terdefinisi

ekstrapolasi: penggunaan hubungan antar variabel untuk memprediksi nilai yang berada di luar jangkauan data

fungsi: pemetaan setiap anggota himpunan kepada (tepat satu) anggota himpunan yang lain

fungsi bijektif: fungsi di mana setiap anggota himpunan dari daerah asal (Domain) tepat mempunyai satu pasangan dari himpunan daerah kawan (Kodomain) dan sebaliknya

fungsi injektif: fungsi di mana anggota berbeda dari himpunan daerah asal (Domain) mempunyai pasangan yang berbeda dari himpunan daerah kawan (Kodomain)

fungsi invers: fungsi di mana pemetaan anggotanya merupakan kebalikan dari pemetaan fungsi aslinya

fungsi surjektif: fungsi di mana anggota himpunan daerah hasil (*Range*) sama dengan anggota himpunan daerah kawan (Kodomain)

garis best-fit: garis yang paling mewakili data pada diagram pencar

garis singgung: garis yang menyinggung lingkaran pada tepat satu titik

interpolasi: penggunaan hubungan antar variabel untuk memprediksi nilai yang berada di dalam jangkauan data

jari-jari: 1. jarak setiap titik pada lingkaran dengan pusat lingkaran
2. ruas garis yang menghubungkan pusat lingkaran dengan salah satu titik pada lingkaran

kodomain atau daerah kawan: himpunan yang memuat nilai-nilai keluaran dari fungsi

koefisien determinasi: proporsi (persentase) dari variabel dependen yang diterangkan oleh variabel independen

koefisien korelasi: ukuran deskriptif numerik dari suatu korelasi

komposisi fungsi: penggabungan dua atau lebih operasi fungsi yang dapat dilakukan dengan syarat tertentu

lingkaran: tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya sama dari pusat lingkaran

***range* atau daerah hasil:** himpunan yang memuat nilai-nilai keluaran yang berpasangan dengan nilai-nilai masukan

regresi linear: model regresi yang memberikan hubungan garis lurus antara dua variabel

relasi: hubungan antara anggota suatu himpunan dengan anggota dari himpunan lainnya

residu: selisih antara nilai variabel dependen yang diamati dan nilai variabel dependen yang diprediksi

segiempat tali busur: segiempat yang keempat sudutnya terletak pada lingkaran

sudut pusat: sudut yang titik sudutnya terletak pada pusat lingkaran dan kaki-kaki sudutnya adalah jari-jari lingkaran

sudut keliling: sudut yang titik sudutnya terletak pada lingkaran dan kaki-kaki sudutnya berupa tali busur

tali busur: ruas garis yang menghubungkan dua titik pada lingkaran

teorema Thales: sudut keliling yang menghadap pada diameter lingkaran adalah sudut siku-siku

teorema Ptolemeus: pada segiempat tali busur, hasil kali diagonal sama besarnya dengan jumlah dari hasil kali sisi yang berhadapan

tes garis vertikal: salah satu cara menentukan apakah sebuah relasi merupakan fungsi melalui grafiknya; cukup dengan menggeser garis vertikal dari kanan ke kiri (atau sebaliknya) dan melihat jumlah titik potong yang dihasilkan

titik singgung: titik tempat lingkaran bersinggungan dengan garis singgung

variabel dependen: variabel yang nilainya dipengaruhi oleh variabel independen

variabel independen: variabel yang akan digunakan untuk membuat prediksi terhadap nilai variabel dependen

Daftar Pustaka

Core-Plus Mathematics. 2009. *Contemporary Mathematics in Context: Course 3 Student Edition*. McGraw-Hill.

Mann, P.S. 2013. *Introductory Statistics (Eighth Edition)*. John Wiley & Sons.

McClave, J.T., & Sincich, T. 2013. *Statistics (Twelfth Edition)*. Pearson Education, Inc.

Murdock, J., Kamischke, E., & Kamischke, E. 2004. *Discovery Advanced Algebra*. Key Curriculum Press.

Peck, R., Olsen, C., & Devore, J.L. 2016. *Introduction to Statistics & Data Analysis (Fifth Edition)*. Cengage Learning.

Pritchard, C. (Ed.). 2003. *The changing shape of geometry: celebrating a century of geometry and geometry teaching*. Cambridge University Press.

Serra, M. 2008. *Discovering Geometry: an Investigative Approach*. Key Curriculum Press.

Skrakowski, J., Smith, H., et al. 2019. *Pearson Edexcel International A Level Statistics 1 (Student Book)*. Pearson Education Limited.

Watkins, A.E, Scheaffer, R.L., & Cobb, G.W. 2008. *Statistics in Action: Understanding a Word of Data (Second Edition)*. Key Curriculum Press.

Daftar Sumber Data

https://www.sciencedirect.com/topics/earth-and-planetary-sciences/solar-eclipse. Diakses tanggal 22 Oktober 2021 pukul 13.00 WIB.

https://tubularinsights.com/youtube-35-hours-minute/. Diakses tanggal 22 Oktober 2021 pukul 14.05 WIB.

http://flysight.ca/wiki/index.php/Geometric_vs._Barometric_Altitude. Diakses tanggal 22 Oktober 2021 pukul 14.30 WIB.

https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/Missions/Jim/Project1ans.html. Diakses tanggal 23 Oktober 2021 pukul 09.10 WIB.

https://internationalclinicaltrials.com/vehicle-braking-time.html. Diakses tanggal 23 Oktober 2021 pukul 10.20.

https://ourworldindata.org/mammals. Diakses tanggal 24 Oktober 2021 pukul 11.00

https://satudata.kemendag.go.id/exchange-rates. Diakses tanggal 24 Oktober 2021 pukul 12.00 WIB.

https://www.bi.go.id/id/statistik/indikator/data-inflasi.aspx. Diakses tanggal 25 Oktober pukul 10.00 WIB.

Daftar Sumber Gambar

https://unsplash.com/photos/3zOXVmtwZV8. Diunduh tanggal 8 Oktober 2021 pukul 13.57 WIB.

https://www.liputan6.com/bisnis/read/3546167/2090-spbu-siap-jualan-premium-pada-h-7-lebaran. Diunduh tanggal 20 Oktober 2021 pukul 14.05 WIB.

https://unsplash.com/photos/n6cNsYCxDPk. Diunduh tanggal 8 Oktober 2021 pukul 16.43 WIB.

https://unsplash.com/photos/R7t1RCmlxU4. Diunduh tanggal 8 Oktober 2021 pukul 16.45 WIB.

https://twitter.com/manutd/status/1433516381153202179. Diunduh tanggal 20 Oktober 2021 pukul 14.30 WIB.

https://xkcd.com. Diunduh tanggal 1 Oktober 2021 pukul 10.00 WIB.

https://unsplash.com/photos/6bOrA63xeHY. Diunduh tanggal 8 Oktober 2021 pukul 13.59 WIB.

https://www.pexels.com/id-id/foto/cahaya-alam-konstruksi-pelabuhan-4582599/. Diunduh tanggal 8 Oktober 2021 pukul 13.59 WIB.

https://en.wikipedia.org/wiki/Karl_Pearson. Diunduh tanggal 20 Oktober 2021 pukul 14.34 WIB.

https://unsplash.com/photos/MAOUpa8wpU8. Diunduh tanggal 8 Oktober 2021 pukul 14.00 WIB.

https://unsplash.com/s/photos/wildfire?orientation=portrait. Diunduh tanggal 8 Oktober 2021 pukul 16.55 WIB.

https://en.wikipedia.org/wiki/Thales_of_Miletus. Diunduh tanggal 20 Oktober 2021 pukul 16.05 WIB.

https://www.gettyimages.com/detail/photo/portrait-of-leonardo-da-vinci-italian-artist-and-royalty-free-image/1263824572. Diunduh tanggal 21 Oktober 2021 pukul 13.30 WIB.

Indeks

M

R

S

T

Biodata Pelaku Perbukuan

Biodata Penulis

Nama Lengkap : Dicky Susanto, Ed.D
E-mail : dicky.susanto@calvin.ac.id
Akun Facebook : Dicky Susanto
Alamat Kantor : Menara Calvin Lt. 8, RMCI. Jl. Industri Blok B14 Kav. 1 Kemayoran, Jakarta Pusat 10610, Indonesia
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Head of Instructional Design dan Dosen, Calvin Institute of Technology (2019–sekarang)
2. Head of Instructional Design dan Dosen, Indonesia International Institute of Life Sciences (2016–2019)
3. Education Consultant, Curriculum Developer and Teacher Trainer (2015–sekarang)
4. Postdoctoral Research Associate, North Carolina State University (2012–2014)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3: Program Studi Pascasarjana Pendidikan Matematika, Boston University, Massachusetts, USA (2004–2009)
2. S2: Program Studi Pascasarjana Pendidikan Matematika, Boston University, Massachusetts, USA (2002–2003)
3. S1: Program Studi Teknik Kimia, Institut Teknologi Indonesia, Tangerang (1992–1997)

Judul Buku dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Dicky Susanto, dkk. (2021), *Matematika untuk SMA/SMK Kelas X*, Kemdikbud, Jakarta

2. Direktorat SMP (2021), *Inspirasi Pembelajaran yang Menguatkan Numerasi Pada Mata Pelajaran Matematika untuk Jenjang Sekolah Menengah Pertama*, Modul, Kemdikbud, Jakarta
3. Direktorat SMP (2021), *Inspirasi Pembelajaran yang Menguatkan Numerasi Pada Mata Pelajaran IPA, IPS, PJOK, dan Seni Budaya untuk Jenjang Sekolah Menengah Pertama*, Modul, Kemdikbud, Jakarta
4. Pengarah Materi untuk Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Kelas Awal (Modul Belajar Siswa, Modul Guru, dan Modul Orang Tua) (2020–2021)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. "Coordinating Multiple Composite Units as a Conceptual Principle in Time Learning Trajectory" (2020)

Nama Lengkap : Savitri K. Sihombing, M.Sc.
E-mail : savitri.sihombing@gmail.com
Akun Facebook : Savitri Sihombing
Alamat Kantor : Yayasan Sinergi Mencerdaskan Tunas Negeri Jalan Scientia Boulevard Barat Blok DRWB no 8 Sektor Ruko Darwin, Summarecon Serpong Tangerang, Banten 15334
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Tim Akademik Matematika, Yayasan Sinergi Mencerdaskan Tunas Negeri (2017–sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Program Studi Pascasarjana Applied Mathematics, University of Twente, Enschede, The Netherlands (2003–2005)
2. S1: Program Studi Teknik Elektro, Institut Teknologi Bandung, Bandung, Indonesia (1996–2001)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Dicky Susanto dkk (2021), *Matematika untuk SMA/SMK Kelas X*, Kemdikbud, Jakarta.
2. Direktorat SMP (2021), *Inspirasi Pembelajaran yang Menguatkan Numerasi Pada Mata Pelajaran Matematika untuk Jenjang Sekolah Menengah Pertama*, Modul, Kemdikbud, Jakarta
3. Direktorat SMP (2021), *Inspirasi Pembelajaran yang Menguatkan Numerasi Pada Mata Pelajaran IPA, IPS, PJOK, dan Seni Budaya untuk Jenjang Sekolah Menengah Pertama*, Modul, Kemdikbud, Jakarta
4. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 1 Diriku Subtema 2 Budaya Hidup Sehat*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
5. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 1 Subtema 2, Tema 2 Subtema 3, dan Tema 3 Subtema 2*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
6. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 1 Subtema 2, Tema 2 Subtema 3, Tema 3 Subtema 2, Tema 4 Subtema 2, Tema 5 Subtema 2, Tema 6 Subtema 2, Tema 7 Subtema 2, Tema 8 Subtema 2, Tema 9 Perayaan Subtema 2,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.

Nama Lengkap : Marianna Magdalena Radjawane, M.Si.
E-mail : marianna.radjawane@gmail.com
Akun Facebook : Marianna Magdalena Radjawane
Alamat Kantor : -
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika dan IPAC

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Dosen Jarak Jauh STKIP Terang Bangsa Timika (2020–sekarang)
2. Konsultan Pendidikan, Pengembang Kurikulum dan Pelatih Guru (2013–sekarang)
3. Guru Fisika SMA Cita Buana Jakarta (2013–2015)
4. Divisi Pelatihan Guru Surya Institute (2011–2013)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Program Studi Pascasarjana Fisika, Institut Teknologi Bandung (1990–1993)
2. S1: Program Studi Astronomi, Institut Teknologi Bandung (1983–1989)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Dicky Susanto dkk (2021), *Matematika untuk SMA/SMK Kelas X*, Kemdikbud, Jakarta.
2. Direktorat SMP (2021), *Inspirasi Pembelajaran yang Menguatkan Numerasi Pada Mata Pelajaran Matematika untuk Jenjang Sekolah Menengah Pertama*, Modul, Kemdikbud, Jakarta
3. Direktorat SMP (2021), *Inspirasi Pembelajaran yang Menguatkan Numerasi Pada Mata Pelajaran IPA, IPS, PJOK, dan Seni Budaya untuk Jenjang Sekolah Menengah Pertama*, Modul, Kemdikbud, Jakarta
4. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 3 Pancaindra Subtema 3 Kesehatan Pancaindra*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
5. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 1 Subtema 3, Tema 2*

Subtema 2, Tema 3 Subtema 3, Tema 4 Subtema 3, Tema 5 Subtema 3, Tema 6 Subtema 3, Tema 7 Subtema 3, Tema 8 Subtema 3, dan Tema 9 Subtema 3, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

6. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 1 Subtema 3, Tema 2 Subtema 2, Tema 3 Subtema 3, Tema 4 Subtema 3, Tema 5 Subtema 3, Tema 6 Subtema 3, Tema 7 Subtema 3, Tema 8 Subtema 3, dan Tema 9 Subtema 3*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
7. *Contributor in Excel in Science Grade 4*, Oxford University Press (2018)
8. *Science Gasing Kelas 3-6*, Penerbit Kandel (2013)

Nama Lengkap : Yulian Candra, B.Sc., S.Pd.
E-mail : yulian.candra@santa-laurensia.sch.id
Akun Facebook : Yulian Candra
Alamat Kantor : Sutera Utama No.1, Alam Sutera, Serpong Utara, Kota Tangerang Selatan, Banten, 15325

Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Senior High School Mathematics Supervisor, SMA Santa Laurensia (2017–sekarang)
2. Head of Mathematics and Science Department, UPH College (2013–2017)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. Non-gelar: Program Teacher Training – MEXT, Master's Program in Education, University of Tsukuba, Japan (2019–2021)
2. S1: Teachers College, Pendidikan Matematika, Universitas Pelita Harapan (2008–2012)

Nama Lengkap : Daniel Sinambela
E-mail : dsf25@umsystem.edu
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : 202 Math Sciences Building 810 East Rollins Street Columbia, MO 65211
Bidang Keahlian : Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Dosen (pengajar) College Algebra, Business Calculus, Calculus 1 and 2, University of Missouri, Columbia, USA (2015–2019)
2. Dosen (pengajar) Ordinary Differential Equations, University of Missouri, Columbia, USA (2020–sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3: Program Studi Pascasarjana Matematika Terapan, University of Missouri, Columbia, USA (2018–Sekarang)
2. S2: Program Studi Pascasarjana Matematika Murni, University of Missouri, Columbia, USA (2015–2018)
3. S1: Program Studi Matematika Murni, dengan minor di Statistik, University of Missouri, Columbia, USA (2012–2015)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. "Asymptotic Properties of Deep Water Solitary Waves with Compactly Supported Vorticity" (2018) https://mospace.umsystem.edu/xmlui/handle/10355/66212
2. "Large-amplitude Solitary Waves in Two-layer Density Stratified Water" (2020) to appear on SIAM journal on Mathematical Analysis https://arxiv.org/pdf/2012.00142.pdf
3. " Orbital stability of Solitary waves in two-layered stratified water with constant vorticity" (ongoing)

Biodata Penelaah

Nama Lengkap : Prof. Dr. Widowati, S.Si., M.Si.
E-mail : widowati.math@gmail.com
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : FSM, Universitas Diponegoro, Jl. Prof. H. Soedharto, SH, Tembalang, Semarang
Bidang Keahlian : Matematika

Riwayat Pekerjaan:

1. Dosen Tetap Jurusan Matematika, Universitas Diponegoro, Semarang (1994–sekarang)
2. Ketua Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Diponegoro, Semarang (2008–2011)
3. Pembantu Dekan II Fakultas Sains dan Matematika (FSM), Universitas Diponegoro, Semarang (2011–2015)
4. Dekan Fakultas Sains dan Matematika (FSM), Universitas Diponegoro Semarang (2015–sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Lulus:

1. S3: Jurusan Matematika, Institut Teknologi Bandung (ITB), Bandung, lulus tahun 2005
2. S2: Jurusan Matematika, Institut Teknologi Bandung (ITB), Bandung, lulus tahun 2000
3. S1: Jurusan Matematika, Universitas Diponegoro (Undip), Semarang, lulus tahun 1993

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. *Sistem Kendali Optimal: Teori dan Aplikasinya di Bidang Inventory*. 2020. Penerbit Undip Press.
2. *Penerapan Teknologi dan Proses Produksi KJABB-IMTA*. 2019. Penerbit Undip Press. ISBN; 978-979-097-591-0 B.54

3. *Modul Teknik Budidaya Sistem Integrated Multi-Thropic Aquaculture (IMTA)*. 2019. Penerbit Undip Press. ISBN: 978-979-097-594-1.
4. *Metode Kendali Diskret:Teori dan Simulasinya*. 2017. Penerbit Undip Press. ISBN: 978-979-097-643-0.
5. *Pemodelan Matematika: Analisis dan Aplikasinya*. 2013. Penerbit Undip Press. ISBN: 978-602-097-370-8.
6. *Kalkulus*. 2012. Penerbit Undip Press. ISBN: 978-602-097-329-6.
7. *Pemodelan Matematika Berbasis Maple*. 2011. Jurusan Matematika FMIPA Undip.

Judul Penelitian/Publikasi dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. "Implementation of an Optimal Control for Reducing Individuals Infected by Hepatitis B Virus". 2021.
2. "Mathematical Modeling and Analysis of Covid-19 Transmission Dynamics in Central Java Province, Indonesia". 2021.
3. "Investigating the Features of Indonesia Stock Price during Covid-19 Pandemic: An Application of Merton Jump Diffusion Model. 2021.
4. "1d-2d Numerical Model for Wave Attenuation by Mangroves as a Porous Structure". 2021.
5. "Piecewise Objective Optimisation Model for Inventory Control Integrated with Supplier Selection Considering Discount". 2021.

Selengkapnya, kunjungi Akun Profil Penelaah:

1. **Scopus ID:** 8255360300
   https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=8255360300
2. **ORCID iD:** 0000-0002-4372-6501
   https://orcid.org/0000-0002-4372-6501
3. **Sinta ID:** 6007839
   https://sinta.ristekbrin.go.id/authors/detail?id=6007839&view=overview
4. **Google Scholar ID:** CczqHJ4AAAAJ
   https://scholar.google.co.id/citations?user=CczqHJ4AAAAJ&hl=id

Nama Lengkap : Dr. Ali Mahmudi
E-mail : alimahmudi@uny.ac.id
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Jalan Colombo No 1 Karangmalang Yogyakarta
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir):

1. Dosen FMIPA UNY

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar:

1. S1 Pendidikan Matematika FKIP Universitas Sebelas Maret Surakarta lulus tahun 1997
2. S2 Pendidikan Matematika Program Pascasarjana Universitas Negeri Surabaya (UNESA) lulus tahun 2003
3. S3 Pendidikan Matematika Sekolah Pascasarjana Universitas Pendidikan Indonesia (UPI) lulus tahun 2010

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. "Pengembangan Bahan Ajar Matematika dengan Pendekatan Kontekstual untuk Pembelajaran di SMK" Tahun 2015
2. "Pengembangan Bahan Ajar Geometri Berbasis Kontekstual untuk Meningkatkan Kemampuan Pemecahan Masalah dan Disposisi Matematis" Tahun 2017
3. "Pengembangan Buku Ajar Struktur Aljabar Berbasis Pendekatan Deduktif di Universitas Riau Kepulauan Batam" Tahun 2018
4. "Pengembangan Model *Micro Teaching* untuk Meningkatkan *Pedagogical Content Knowledge* Mahasiswa Calon Guru Matematika" Tahun 2018
5. "Pengembangan Model Pembelajaran Matematika Berbasis Masalah dengan Pendekatan Humanis yang Berorientasi pada Math-Literacy dan Pengelolaan Math-Anxiety Siswa" Tahun 2019
6. "Pengembangan Buku Ajar Geometri Eksploratif Berbasis HOTS" Tahun 2020
7. "Desain Instruksional Berpikir Komputasi dalam Pembelajaran Matematika Realistik" Tahun 2021

8. “The Analysis of the Gakkohtosho’s Mathematics Textbook Using the Cognitive Load Theory Perspective” Tahun 2021

Informasi Lain

Sebagai Penelaah Buku Teks Pelajaran Matematika Kelas IX Kemdikbud Tahun 2014

Biodata Ilustrator

Nama Lengkap : Faris Majduddin Naufal, S.M
E-mail : farismnaufal@gmail.com
Akun Facebook : Faris Naufal
Alamat Kantor : Monoponik Studio. Jl. Otto Iskandar Dinata No. 458, Bandung
Bidang Keahlian : Desain Grafis & Ilustrasi

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Co Founder & Principal Designer, Monoponik Studio (2012—sekarang)
2. Marketing Staff (Internship), Mahanagari Nusantara (2012)
3. Visual Artist/Ilustrator (2010—sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S1: Manajemen Bisnis, Telkom University (2009—2015)

Karya/Pameran/Eksibisi dan Tahun Pelaksanaan (10 tahun terakhir):

1. 111 Buya Hamka Exhibition, Universitas Al Azhar, Jakarta (2019)
2. All The Small Things, Qubicle, Jakarta (2017)
3. Seek A Seek Exhibition (with Monoponik), Dia.Lo.Gue, Jakarta (2016)
4. Reset Collective Exhibition, N-Workshop, Yogyakarta (2016)
5. Super Robot Day, Bandung (2015)
6. Canstop, Gardu House, Jakarta (2014)
7. Rupanada (with Monoponik), Jogja Gallery, Yogyakarta (2014)
8. 10th Pictoplasma, Berlin, Jerman (2014)
9. Ace&King (Aceking Sketch Squad), Sanggar Mitra, Bandung (2014)
10. Odessa Draw, Odessa, Ukraina (2013)
11. Indonesia Kreatif (PPKI), Epicentrum Walk, Jakarta (2012)
12. Indonesia Kreatif (PPKI), JEC, Jakarta (2011)
13. Postcard Untuk Sahabat (Tugitu Unite), Gedung Kesenian Solo, Solo (2011)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa Kelas 3 Tema 1,3-9 Subtema 3*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
2. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Pendamping Bagi Guru Kelas 3 Tema 1,3-9 Subtema 3*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
3. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 1,3-9 Subtema 3*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. "*Pengaruh Word of Mouth Marketing* Melalui Media Twitter @FLAMEONfootmate Terhadap Keputusan Pembelian Konsumen Tahun 2014" (2015)

Biodata Penyunting Naskah

Nama Lengkap : Tri Hartini, S.S.
E-mail : trihartini2703@gmail.com
Akun Facebook : Tri Hartini
Alamat Kantor : -
Bidang Keahlian : Editing buku/naskah, proof read

Riwayat Pekerjaan dalam 10 Tahun Terakhir:

Menjadi editor lepas di beberapa penerbit di Yogyakarta (2000—sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

Fakultas Sastra/Ilmu Budaya Universitas Gadjah Mada Yogyakarta (1992—1998) jurusan Sastra Indonesia spesialisasi bidang Linguistik.

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 tahun terakhir):

Salam 3 Jari Leadership ala Jokowi. 2014. Yogyakarta: Penerbit Kanisius

Informasi Lain

Selama 20 tahun bekerja sebagai editor, telah menyunting banyak buku dengan berbagai jenis tema seperti keagamaan, politik, sains, humaniora (filsafat, sosial, hukum, bahasa, sastra, seni) dan lain-lain, baik naskah asli maupun terjemahan, di beberapa penerbit di Yogyakarta.

Judul Buku yang Pernah Disunting (10 Tahun Terakhir):

1. Dewayani, Sofie, dkk. (2021), Buku Pelajaran Bahasa Indonesia Kelas VII, Kemdikbud, Jakarta.
2. Dewayani, Sofie, dkk. (2021), Buku Panduan Guru Pelajaran Bahasa Indonesia Kelas VII, Kemdikbud, Jakarta.
3. Dicky Susanto dkk. (2021), *Matematika untuk SMA/SMK Kelas X*, Kemdikbud, Jakarta.
4. Dicky Susanto dkk. (2021), *Buku Panduan Guru Matematika untuk SMA/SMK Kelas X*, Kemdikbud, Jakarta.

5. Direktorat SMP (2021), *Inspirasi Pembelajaran yang Menguatkan Numerasi Pada Mata Pelajaran Matematika untuk Jenjang Sekolah Menengah Pertama*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
6. Direktorat SMP (2021), *Inspirasi Pembelajaran yang Menguatkan Numerasi Pada Mata Pelajaran IPA, IPS, PJOK, dan Seni Budaya untuk Jenjang Sekolah Menengah Pertama*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
7. Direktorat SMP. (2021) *Inspirasi Pembelajaran yang Menguatkan Literasi pada Mata Pelajaran Bahasa Indonesia untuk Jenjang Sekolah Menengah Pertama*, Kemdikbud, Jakarta.
8. Kumalasari, Ade dan Latifah. (2021), Buku Pelajaran Bahasa Indonesia Kelas VI, Kemdikbud, Jakarta.
9. Kumalasari, Ade dan Latifah. (2021), Buku Panduan Guru Pelajaran Bahasa Indonesia Kelas VI, Kemdikbud, Jakarta.
10. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa Kelas 1-3 Tema 1-9*, Kemdikbud, Jakarta.
11. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Pendamping Bagi Guru Kelas 1-3 Tema 1-9,* Kemdikbud, Jakarta.
12. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1-3 Tema 1-9, Kemdikbud, Jakarta.*

Biodata Penata Letak (Desainer)

Nama Lengkap : M. Firdaus Jubaedi
E-mail : muhafir@gmail.com
Akun Facebook : Muhammad Firdaus Tjl
Alamat Kantor : -
Bidang Keahlian : Desain Grafis

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Koordinator tim pengolah naskah Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh (2020—2021)
2. Staf pada Pusat Analisis dan Sinkronisasi Kebijakan (PASKA) Kemendikbud (2019—2020)
3. Staf pada Staf Ahli Mendikbud bidang pembangunan karakter (2018—2019)
4. *Audio Visual Designer* di Cita Rasa Prima Indonesia Berjaya (2016—2018)
5. *Intern Junior Art Director* di Syafa'at Marcomm (2014)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S1: Desain Komunikasi Visual, Institut Teknologi Nasional Bandung (2011—2016)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Dicky Susanto dkk (2021), *Matematika untuk SMA/SMK Kelas X*, Kemdikbud, Jakarta.
2. Dicky Susanto dkk (2021), *Buku Panduan Guru Matematika untuk SMA/SMK Kelas X*, Kemdikbud, Jakarta.
3. Direktorat SMP (2021), *Inspirasi Pembelajaran yang Menguatkan Numerasi Pada Mata Pelajaran Matematika untuk Jenjang Sekolah Menengah Pertama*, Modul, Kemdikbud, Jakarta
4. Direktorat SMP (2021), *Inspirasi Pembelajaran yang Menguatkan Numerasi Pada Mata Pelajaran IPA, IPS, PJOK, dan Seni Budaya untuk Jenjang Sekolah Menengah Pertama*, Modul, Kemdikbud, Jakarta

5. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa Kelas 1 Tema 1-9 Subtema 1*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
6. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Pendamping Bagi Guru Kelas 1 Tema 1-9 Subtema 1*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
7. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 1-9 Subtema 1*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
8. Direktorat Pembinaan PAUD (2019), *Panduan Praktis Penguatan Pendidikan Karakter pada Pendidikan Anak Usia Dini*, Kemendikbud, Jakarta
9. Direktorat Pembinaan PAUD (2019), *Pedoman Penguatan Pendidikan Karakter pada Pendidikan Anak Usia Dini*, Kemendikbud, Jakarta.